

# 湾曲斜面における有限幅すべり面を用いた極限平衡法によるすべり安定性解析

キーワード：斜面 安定解析 極限平衡法

豊橋技術科学大学 学生会員 森政信吾  
豊橋技術科学大学 国際会員 三浦均也

## 1. はじめに

実務における斜面の安定性評価は、二次元条件での極限平衡法による解析に基づいて行われるのが一般的である。しかし、普通、斜面は水平方向に湾曲しており、また地質の不均質な分布などによってすべり面は有限の幅を持つ三次元的な形状をしているのが一般的である。本研究では、斜面先と斜面肩のラインを同心円で規定した水平面上で湾曲した均質な粘性土斜面 ( $\phi=0$ ) のすべりに対する安定性を、極限平衡法を用いて三次元条件で検討した。解析では回転楕円体によりすべり面の形状を仮定して滑動モーメントと抵抗モーメントを計算し、最小の安定係数が得られるすべり面の極限形状、極限安定係数を、斜面先破壊に底部破壊を加えた広い条件で総合的に検討した。一連の解析により、斜面の傾斜角や基盤までの深さだけでなく、湾曲斜面の曲率半径、すべり面の規模(幅)をパラメータとした安定係数を得ることができ、計算結果を安定図表にまとめて検討した。

## 2. 解析方法

### 2.1 すべり面の形状

図-1 に傾斜角 $\beta$ の粘性土斜面と解析で想定する三次元すべり面を示す。 $y$ 軸は斜面の幅方向にとり、 $y$ 軸に垂直に $x, z$ 軸をとる。三次元すべり面形状は $y=0$ 面に関して対称であると仮定する。鶴飼<sup>1)</sup>は、この図に示すようなすべり土塊に作用する力のつり合いを満たし、安全率 $F_S$ が最小となるすべり面形状は、 $y$ 軸に平行な中心軸を有する回転体面と与えられることをBakerら<sup>2)</sup>の変分法に基づく定式化にならって証明している。このような回転体面の式は、

$$(x-x_r)^2 + (z-z_r)^2 = r^2(y) \quad (1)$$

で与えられる。ここに、 $O_r(x_r, z_r)$ は回転の中心軸の座標、 $r(y)$ は回転体の半径で、任意の $y$ の関数である。本研究では、式(1)を満たすすべり面形状として、図-2 に示すような回転楕円体を採用する。回転楕円体は数学的な取り扱いが容易であり、また実現象と比較しても概ね妥当な形状であると考えられる。本研究で用いる回転楕円体を規定する式は以下のものである。

$$\frac{(x-x_r)^2}{R^2} + \frac{y^2}{w_y^2} + \frac{(z-z_r)^2}{R^2} = 1 \quad (2)$$

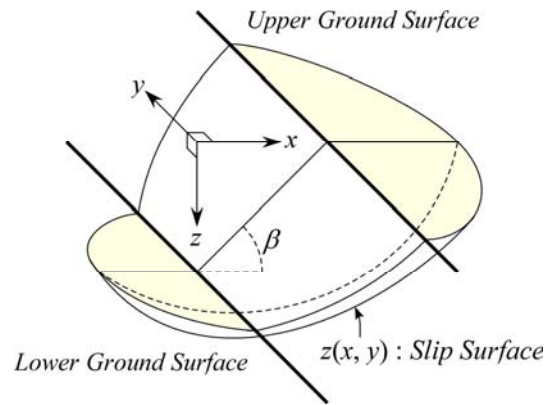


図-1 斜面と任意のすべり面

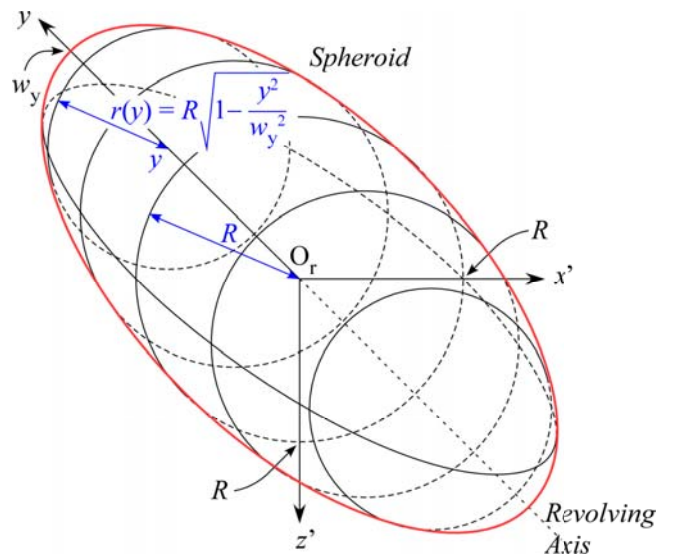


図-2 回転楕円体

ここに、 $R$ は $x, z$ 方向半径、 $w_y$ は $y$ 方向半径を表す。任意の $y$ 座標における $x-z$ 断面（円）の半径は、

$$r(y) = R\sqrt{1 - (y/w_y)^2} \quad \because (x - x_r)^2 + (z - z_r)^2 = R^2 \left[ 1 - (y/w_y)^2 \right] \quad (3)$$

で表される。

## 2.2 斜面の形状

本研究で対象とする斜面の形状は、図 - 3(a)に示すような直線形状、および図 - 3(b), (c)に示すような湾曲形状である。斜面の高さを $H$ 、傾斜角を $\beta$ とする。直線斜面は二次元斜面であり、斜面先と斜面肩のラインが $y$ 方向に平行に延びているものである。一方湾曲斜面は、斜面先と斜面肩のラインが同心円で規定されるもので、 $y$ 方向に断面形状が変化する。湾曲の度合を表す曲率半径は、斜面先のラインを表す円の半径 $R_t$ を斜面高さ $H$ で正規化した値 $R_t/H$ を使って表す。湾曲斜面には2つのタイプの形状が考えられ、(b)のタイプを凹型湾曲斜面、(c)のタイプを凸型湾曲斜面と呼ぶ。3種類の斜面は $y=0$ 面に関して左右対称である。

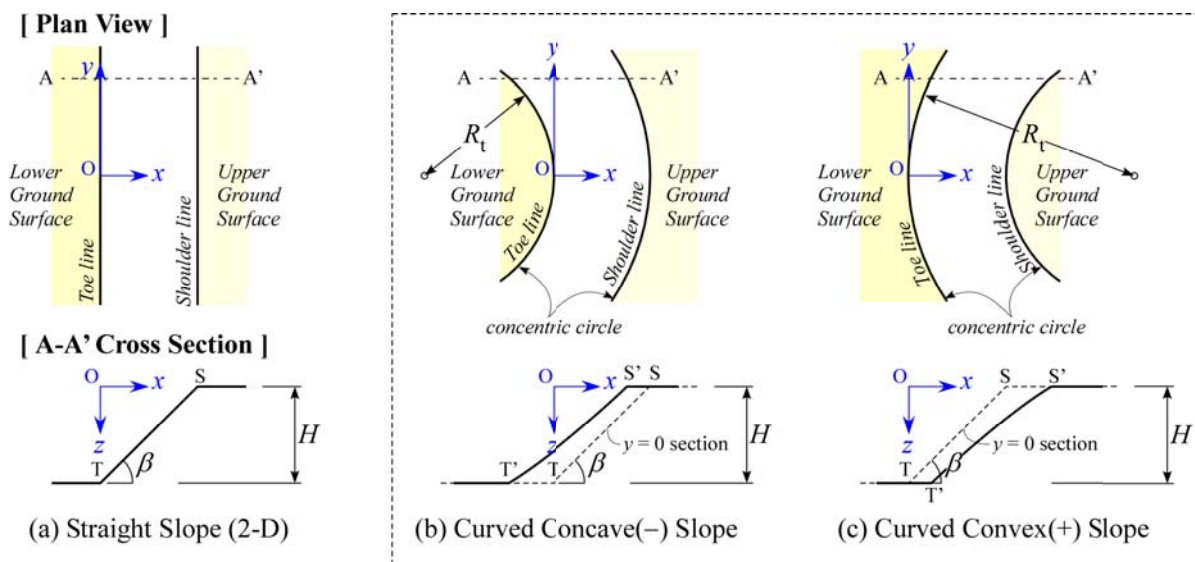


図 - 3 対象とする斜面の形状（平面図・断面図）

## 2.3 解析方法

解析方法は斜面の形状にかかわらず同じであるため、ここでは直線斜面を例に説明する。図 - 4 は、直線斜面と任意のすべり面の形状を表したもので、ハッチをつけた部分はすべり土塊を表す。すべり土塊は $y=0$ 面に関して左右対称であるため、計算はすべり土塊の半分 ( $0 \leq y \leq w_{slid}$ ) について行えばよい。図 - 4 に示すように、すべり土塊を $y$ 方向の任意の位置で切り、微小幅 $dy$ のスライスを取り出すと、そのスライスに働く回転軸 $O_r$ についての滑動モーメント $m_d(y)dy$ は次式となる。

$$m_d(y)dy = \gamma G_z'(y)dy \quad (4)$$

また、抵抗モーメント $m_r(y)dy$ は次のように表せる。

$$m_r(y)dy = cL(y)r(y)\sqrt{dr^2 + dy^2} = cL(y)r(y)\sqrt{(dr/dy)^2 + 1} dy \quad (5)$$

ここに、 $c$ は粘着力、 $\gamma$ は単位体積重量である。また、 $G_z'(y)$ はスライスの $z'$ 軸についての断面一次モーメント、 $L(y)$ と $r(y)$ はそれぞれスライスすべり円弧の長さと同半径を表し、すべて幾何学的に求まる。また、式(2)を $y$ で微分することにより以下の式が得られる。

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{R \cdot y}{w_y \sqrt{w_y^2 - y^2}} \quad (6)$$

すべり土塊全体での滑動モーメント $M_d$ と抵抗モーメント $M_r$ は、式(4)と(5)をすべり面幅で積分することにより求めるため、安全率 $F_S$ は次のようである。

$$F_S = \frac{M_r}{M_d} = \frac{c}{\gamma H} \cdot \frac{H \int_0^{w_{slid}} L(y)r(y)\sqrt{(dr/dy)^2 + 1} dy}{\int_0^{w_{slid}} G_z(y)dy} \quad (7)$$

したがって、Terzaghiの提案した粘着力に対する安定係数 $N_S$ は以下の式で求められる。

$$N_S = \frac{\gamma H}{c'} = \frac{\gamma H}{c/F_S} = \frac{H \int_0^{w_{slid}} L(y)r(y)\sqrt{(dr/dy)^2 + 1} dy}{\int_0^{w_{slid}} G_z(y)dy} \quad (8)$$

式(8)の積分は数学的に解くことが困難であるため、図-5に示すようにすべり土塊を $y$ 方向にいくつかのスライスに分割し、Simpsonの積分公式を用いて数値的に計算する。なお、この解析はすべり土塊を剛体と仮定した剛塑性解析であり、すべりは $y$ 軸に垂直な方向に生じ、すべり面には $y$ 方向のせん断力が作用しない(せん断抵抗力が $x, z$ 方向にのみ発揮される)とする。また、スライス間のせん断力のやりとりはないものとする。

安定解析は、1つの解析条件ごとに、回転の中心軸 $O_r$ の位置を変えて式(8)の安定係数を算出し、試行錯誤法により得られる最小の安全率に対応する安定係数 $N_S$ を見つけるという一連の計算を実施する。

## 2.4 解析条件

直線斜面では、斜面の傾斜角 $\beta$ 、仮定するすべり面幅 $w_{slid}$ をパラメータとし、斜面先破壊および底部破壊に対する安定係数を計算する。湾曲斜面では、水平面上での斜面先の曲率半径 $R/H$ もパラメータとなる。底部破壊に対する安定係数を計算する際には、基盤層のある深さもパラメータとなり、深さ係数 $n_D$ を用いて表す(図-6参照)。深さ係数は斜面上部のレベルから、斜面高さ $H$ の何倍の深さに基盤層があるかを表す係数であり、以下の式で与えられる。

$$n_D = \frac{D}{H} \quad (D = n_D \cdot H) \quad (9)$$

ここに、 $D$ は斜面上部のレベルを基準とした基盤層までの深さである。

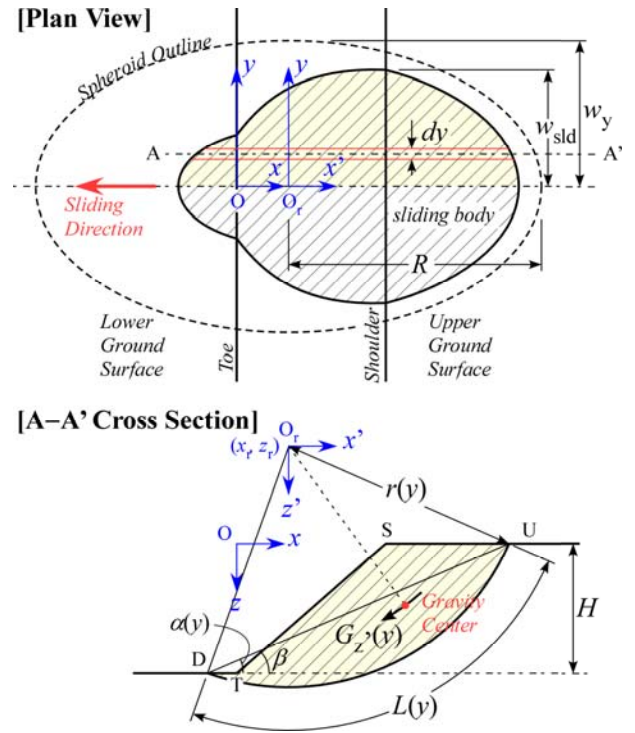


図-4 直線斜面の平面図と断面図

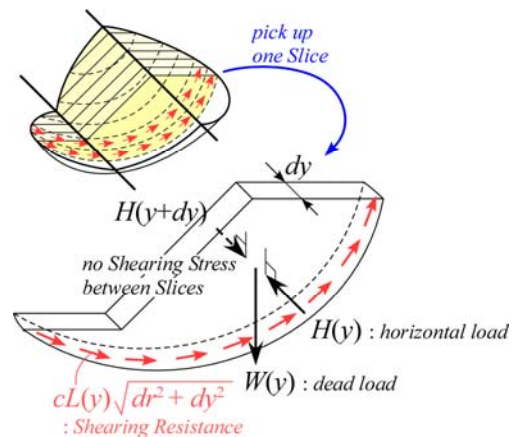


図-5 スライスに作用する力

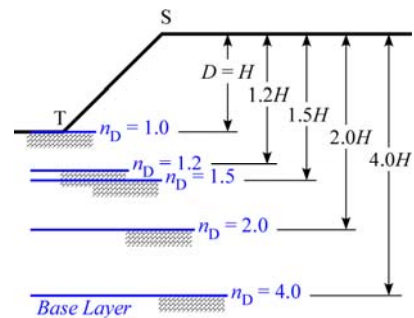


図-6 基盤層の位置と深さ係数

### 3. 解析結果

#### 3.1 直線斜面のすべり安定性について の三次元解析と二次元解析

図-7に、直線斜面において、仮定するすべり面幅 $w_{slid}$ を斜面高さ $H$ で正規化した正規化すべり面幅 $w_{slid}/H$ と安定係数 $N_s$ の関係を示す。(a)~(f)のグラフは、斜面の傾斜角を $\beta=15^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ と $15^\circ$ ずつ変化させて解析した結果である。各グラフには、斜面先破壊(Toe Failure)に対する安定係数及び底部破壊に対する安定係数を併せて描いている。底部破壊については、深さ係数を $n_D=1.0, 1.2, 1.5, 2.0, 4.0$ とした場合の結果だけを示しているが、解析ではさらに深くまで間隔を細かくして計算している。各グラフの右側の軸には、二次元解析による結果をプロットしている。

図-8は、横軸を傾斜角 $\beta$ にして解析結果をまとめたもので、仮定するすべり面幅をパラメータとした安定図表である。(a)~(d)のグラフは、それぞれ正規化すべり面幅を $w_{slid}/H=1.0, 2.0, 5.0, 10.0$ と変化させて解析した結果で、(e)はすべり面幅を十分に大きくとったものである。また、二次元解析での結果も別グラフとして(f)に示している。

#### 3.1.1 すべり面の三次元効果

図-7より、三次元解析で得られる安定係数は、斜面の傾斜角、仮定するすべり面幅にかかわらず、二次元解析で得られる安定係数を上回っていることが分かる。三次元形状をもつすべり面を仮定して解析を行うと、その側端部でのせん断抵抗が斜面の安定に寄与すること(端部効果)がこれまでの研究でも指摘されているが、本研究での解析においてもその端部効果が表れている。端部効果による安定係数の増加は、仮定するすべり面幅が小さいほど、また基盤面までの深さが浅いほど顕著に表れている。

図-8には、この端部効果について、興味深い解析結果が示されている。直線斜面は二次元斜面であるため、三次元解析において仮定するすべり面幅を十分に大きくとると、すべり面形状も二次元形状に近づき二次元解析と同等になると考えられるのであるが、図-8(e)と(f)を比較すると結果が大きく異なっていることが分かる。斜面の傾斜角、基盤層の深さが同じ条件であれば、三次元解析での安定係数が二次元解析での安定係数を上回っている。このことから、三次元解析では仮定すべり面幅をいくら大きくしても、どこかですべり面の側端部が必ず地表面に現れるため、端部効果が得られるということが分かる。なお、二次元解析の結果はTerzaghiが示した結果<sup>3)</sup>と一致することを確認している。

#### 3.1.2 基盤の深さと臨界すべり面

図-7, 図-8はともに、深さ係数 $n_D$ が小さいほど安定係数 $N_s$ が大きくなっていることを示している。これは二

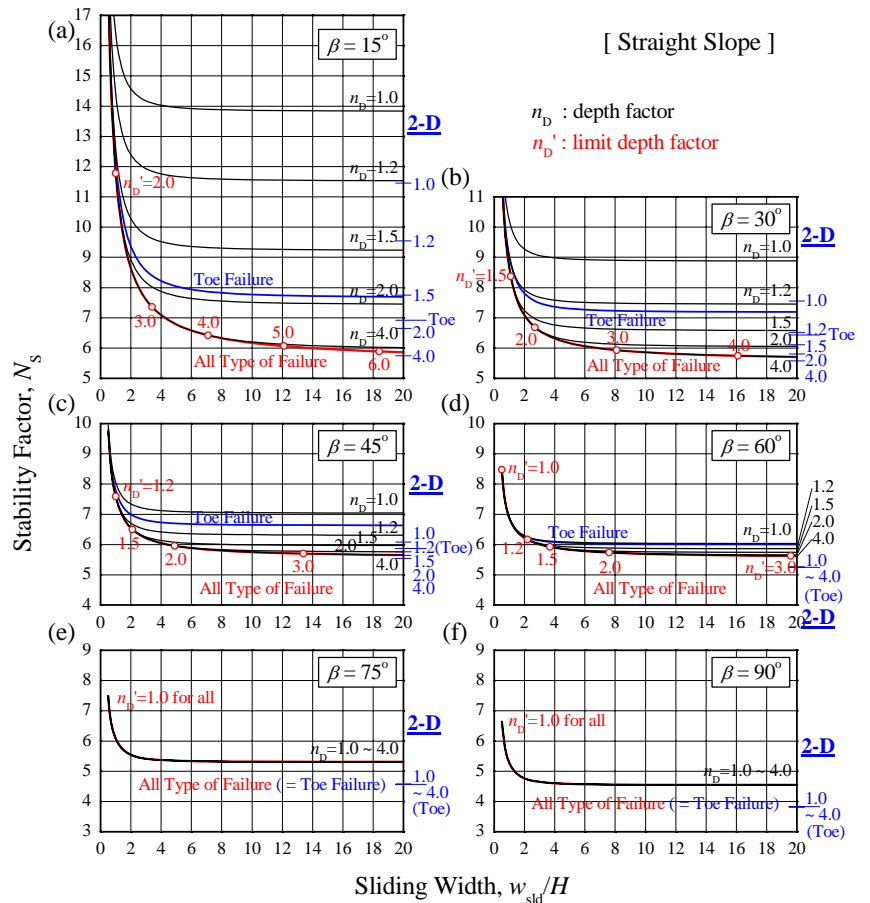


図-7 仮定するすべり面幅と安定係数の関係(直線斜面)

[ 傾斜角 $\beta$ がパラメータ ]



次元解析にも共通することであり、基盤層が浅いほど斜面の安定性が高くなることを示唆している。ただし、斜面の傾斜角 $\beta$ がある値を超えると、基盤の深さに関係なく斜面先破壊が臨界すべり面形状となる。斜面の破壊形式が斜面先破壊に限定される傾斜角が、二次元解析（図 - 8(f)）では $\beta > 53^\circ$ 、三次元解析では仮定するすべり面幅により多少変化するが、大体 $\beta > 60^\circ \sim 70^\circ$ となることから、三次元解析では安定係数を決めるパラメータとして基盤層の深さがより重要になる。

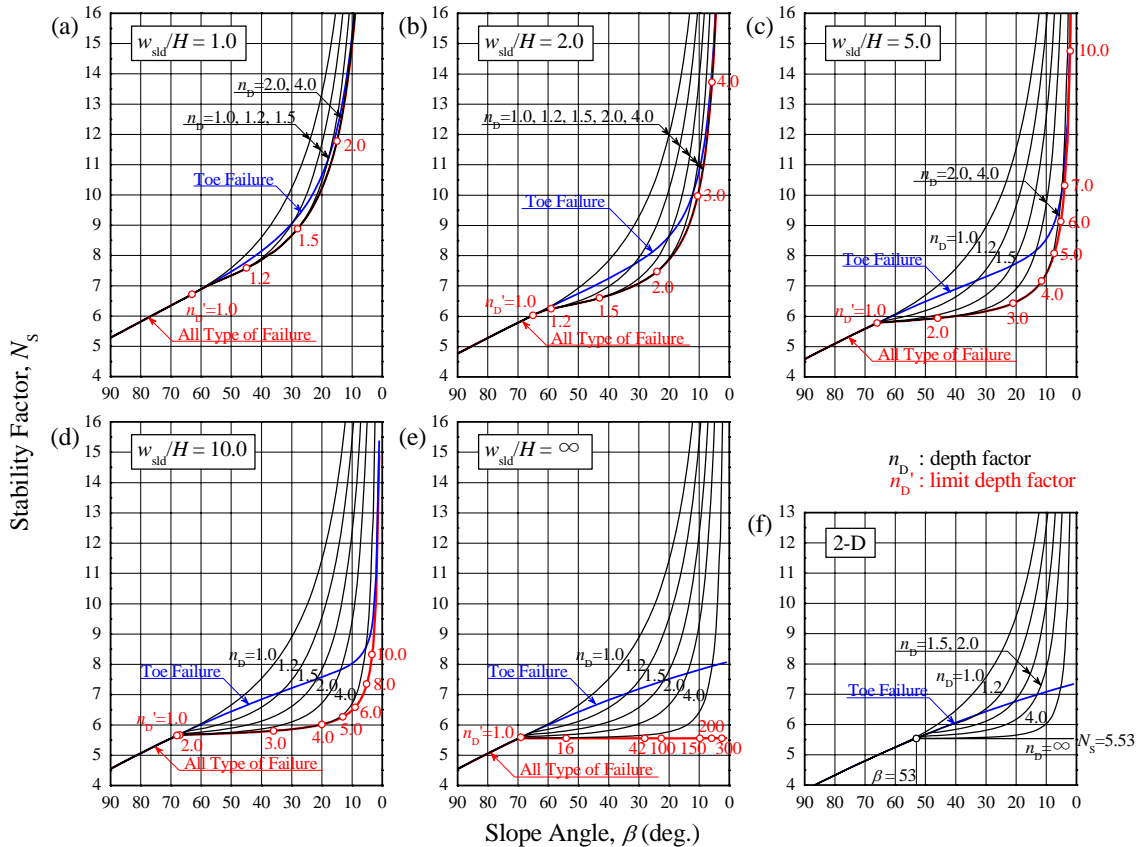


図 - 8 斜面の傾斜角と安定係数の関係 [ 安定図表 ] (直線斜面)

[ 仮定するすべり面幅がパラメータ ]

図 - 9 には、すべり面の達する深さ $d$ をパラメータとして解析した結果の一例を示している。斜面の傾斜角は $\beta = 30^\circ$ で、仮定する正規化すべり面幅 $w_{sld}/H$ は1.0~5.0まで変化させている。この図より、斜面の角度とすべり面幅が決まると、ある深さを通るすべり面において最小の安定係数が得られることが分かる。このときの深さを臨界深さ $d'$ 、それに対応する深さ係数を臨界深さ係数 $n_D'$ 、安定係数を臨界安定係数 $N_s'$ と呼ぶことにする。すべり破壊は安定係数が最小となるすべり面で生じるため、基盤層が臨界深さよりも深いところに位置していたとしてもすべり面はこの臨界深さまでしか進展しないはずである。一方、二次元解析では、深さ係数 $n_D$ を設定すると臨界すべり円弧は必ず基盤面に接する結果になる

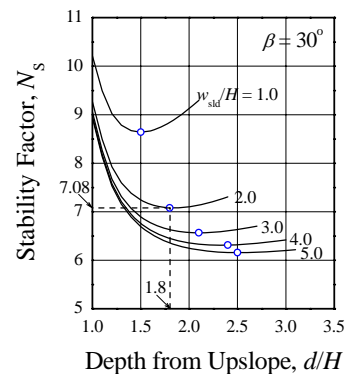


図 - 9 すべり面の深さと安定係数の関係

ので、 $n_D = \infty$ で安定係数が最小となる。実現象を考えても、臨界すべり面が必ず基盤面に接するというのは不自然であり、図 - 9 に示すように適切な臨界深さがすべり面の幅に対応して存在すると考えるべきであろう。

以上のことを踏まえ、各すべり面幅 $w_{sld}/H$ について臨界安定係数 $N_s'$ を計算した結果を図 - 7 および図 - 8 に示し

ている (All Type of Failure)。理論的には安定係数が臨界安定係数を下回ることはないため、基盤層の深さが分からなくても、臨界安定係数を使っていれば誤差は安全側に出ることになる。

### 3.1.3 臨界すべり面のサイズと位置

図 - 10 は、斜面先破壊に対して、仮定する正規化すべり面幅 $w_{sl}/H$ と斜面の傾斜角 $\beta$ により、臨界円の中心軸( $x_r, z_r$ )がどのように推移していくかを示したものである。比較のため、二次元解析で得られた結果も同図に示す。二次元解析では $\beta$ の値だけで臨界円が決定されるが、三次元解析では正規化すべり面幅も臨界円を決めるパラメータとなることが分かる。図 - 11 は、図 - 10 のグラフをもとに、 $\beta = 45^\circ$ の斜面について $y = 0$ における臨界円の形状を描いたものである。仮定するすべり面幅が大きくなるほどすべり土塊が大きくなり、二次元解析で得られる臨界円の大きさに近づいていることが分かる。

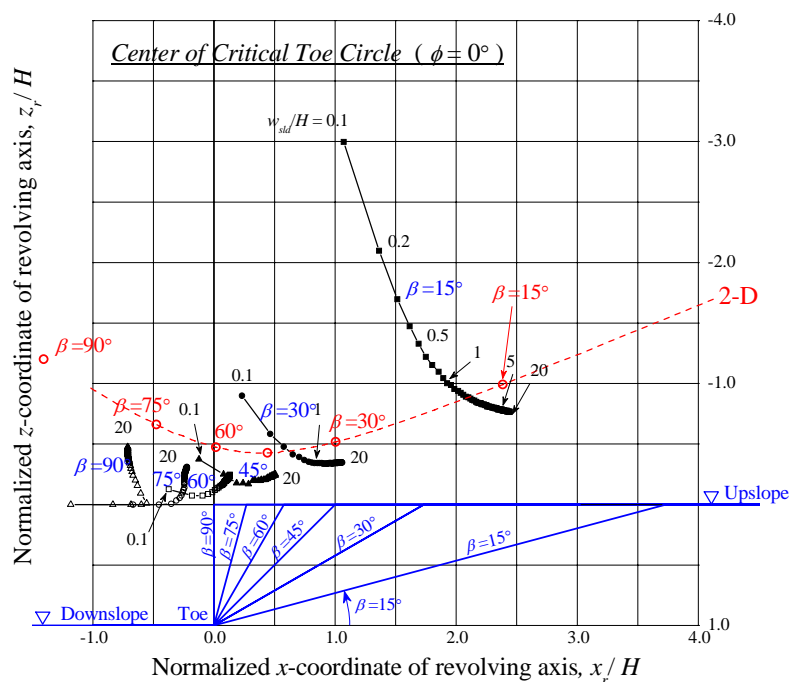


図 - 10 斜面先破壊に対する臨界円の中心座標 (直線斜面)

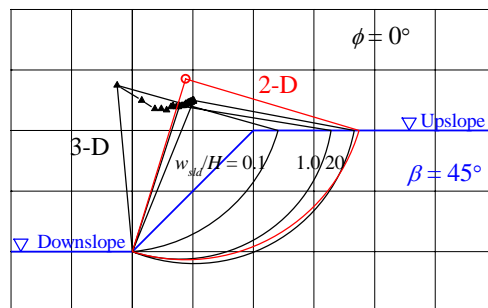


図 - 11 斜面先破壊に対する臨界円の形状 (直線斜面 $\beta = 45^\circ$ ,  $y = 0$ 断面)

## 3.2 湾曲斜面のすべり安定性解析

図 - 12(a), (b)に、それぞれ凹型湾曲斜面と凸型湾曲斜面において、仮定する正規化すべり面幅 $w_{sl}/H$ と安定係数 $N_s$ の関係を示す。この図では、斜面の傾斜角 $\beta$ をパラメータとしている。各グラフには、斜面の湾曲の度合を表す曲率半径 $R/H$ をパラメータとした、斜面先破壊に対する安定係数 $N_s$ と臨界安定係数 $N_s'$ をプロットしている。比較のため、直線斜面で得られた結果を破線で示す。 $R/H$ の値が小さいケースや、傾斜角 $\beta$ が大きいケースでは、解析結果が途中で切れているものが見られる。これは、幾何学的な条件より、すべり面の形成条件が限定されるためである。

### 3.2.1 斜面の三次元形状の影響

湾曲斜面では、直線斜面と比較して特徴的な結果を示している。図 - 12 より、斜面先破壊に対する安定係数について見ると、曲率半径 $R/H$ にかかわらず、凹型斜面では直線斜面を上回り、また凸型斜面では下回っていることが分かる。また、すべての破壊形式を考慮した臨界安定係数では、 $\beta = 45^\circ$ まではどちらのタイプの湾曲斜面で

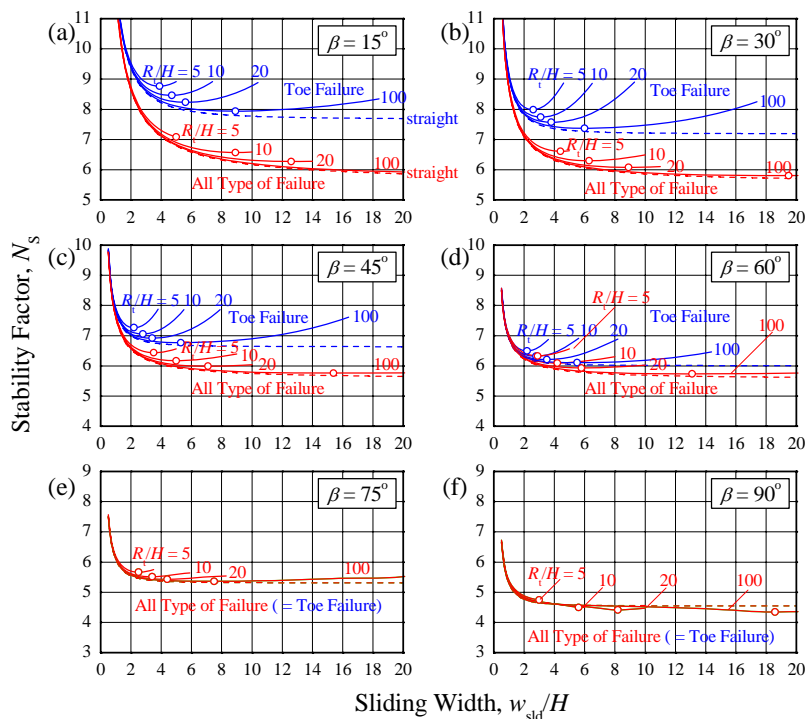
も直線斜面を上回っている。しかし、 $\beta = 60^\circ$ を超えると両者に違いが出ている。凸型斜面については、 $\beta \geq 75^\circ$ または $\beta = 60^\circ$ でも曲率半径が小さいと、臨界すべり破壊は斜面先破壊になるため、 $\beta \leq 45^\circ$ までの斜面先破壊に対する安定係数と同様に、直線斜面を下回っている。凹型斜面では、 $\beta = 90^\circ$ のケースを除けばすべて直線斜面を上回っている。

一部のケースを除くと、図 - 12 に示すように、すべり面がある幅を持つときに、安定係数（臨界安定係数）が最小値になることが分かる。これは、直線斜面ではすべり面幅を仮定しなければ臨界すべり面は一意に決まらないが、湾曲斜面ではすべり面の広がり拘束する要因がなくとも臨界すべり面が決定されることを表している。このときのすべり面幅を臨界すべり面幅 $w_{slid}$ 'と呼ぶことにする。

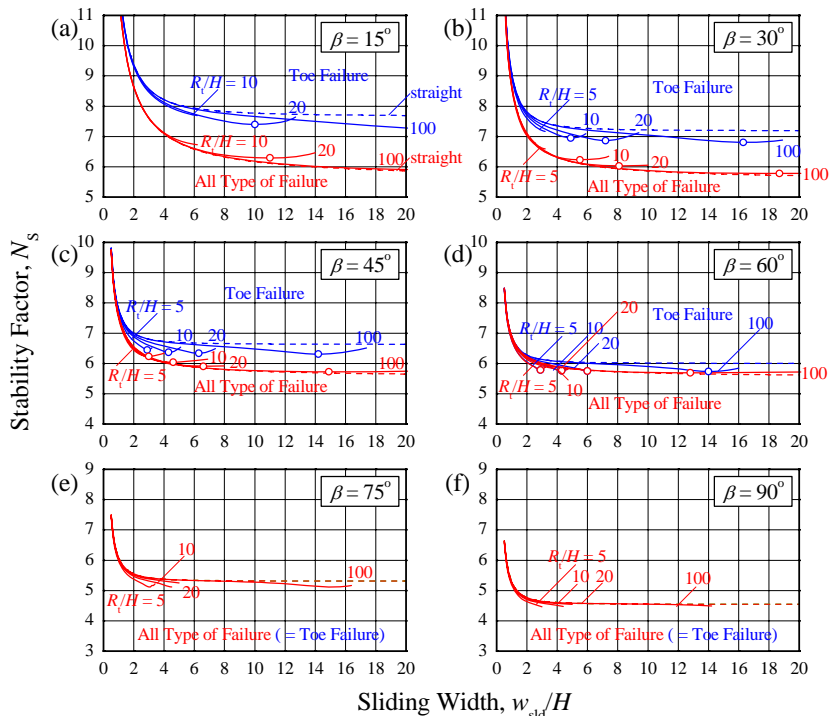
図 - 13 は、湾曲斜面のタイプごとに曲率半径 $R/H$ と臨界すべり面幅 $w_{slid}$ 'の関係をプロットしたものである。斜面の傾斜角 $\beta$ をパラメータとし、斜面先破壊を仮定した場合とすべての破壊形式を考慮した場合を1つのグラフにまとめている。

また、臨界すべり面幅に対応して最小となる安定係数 $N_s$ （臨界安定係数 $N_s'$ ）についても別のグラフにまとめている。この図から、同じ曲率半径であれば、凸型斜面よりも凹型斜面の方が臨界すべり面幅の広がり大きく、また安定係数、臨界安定係数ともに大きくなる事が分かる。どちらについてもいえることであるが、臨界すべり面幅は曲率半径の対数値にほぼ比例して大きくなっている。安定係数、臨界安定係数は、逆に曲率半径の対数値に比例して小さくなっている。

図 - 14 は、曲率半径 $R/H = 100$ の凹型と凸型の湾曲斜面について、正規化すべり面幅を $w_{slid}/H = 2.0, 5.0, 10.0$ と仮定した場合の安定図表である。図 - 8 の直線斜面での安定図表と比較すると、深さ係数 $n_D$ が同じであれば、湾曲斜面の方が大きな安定係数が得られることが分かる。



(a) 凹型(-)湾曲斜面



(b) 凸型(+)湾曲斜面

図 - 12 仮定するすべり面幅と安定係数の関係（湾曲斜面）

[ 傾斜角 $\beta$ がパラメータ ]

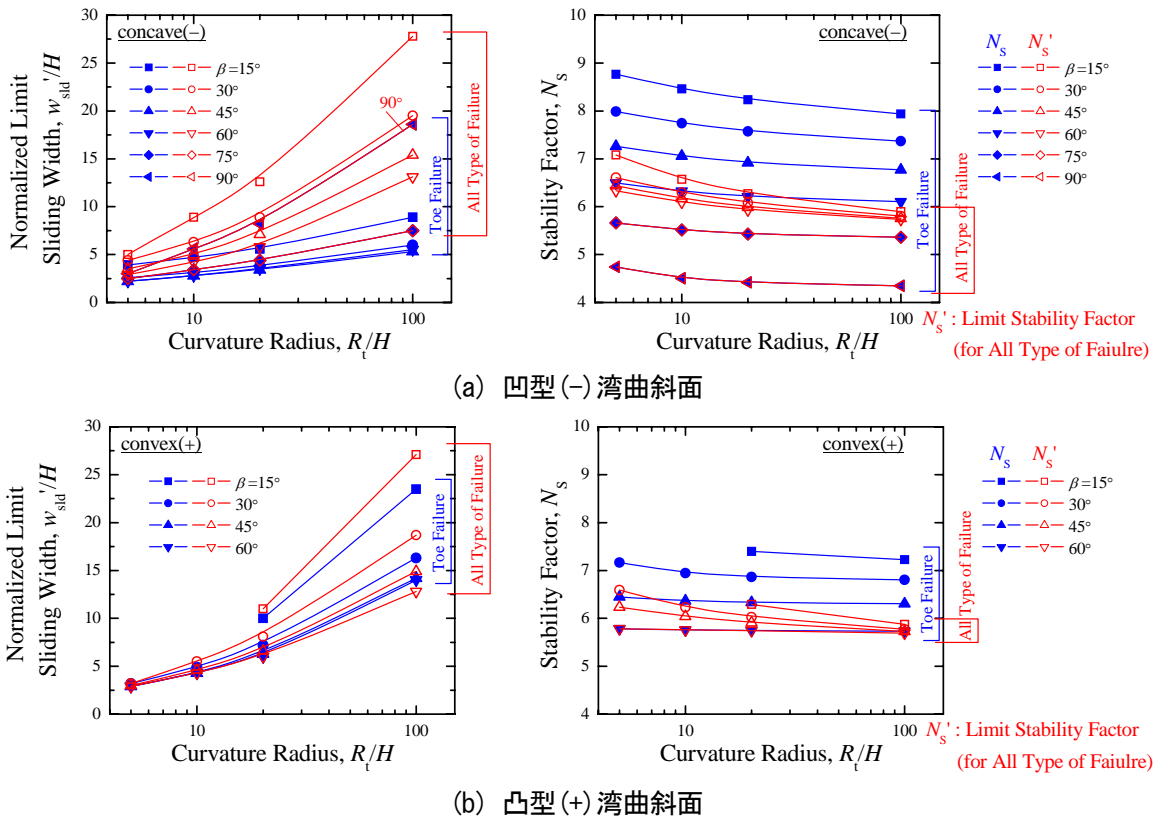


図 - 13 曲率半径と臨界すべり面幅・最小の安定係数の関係

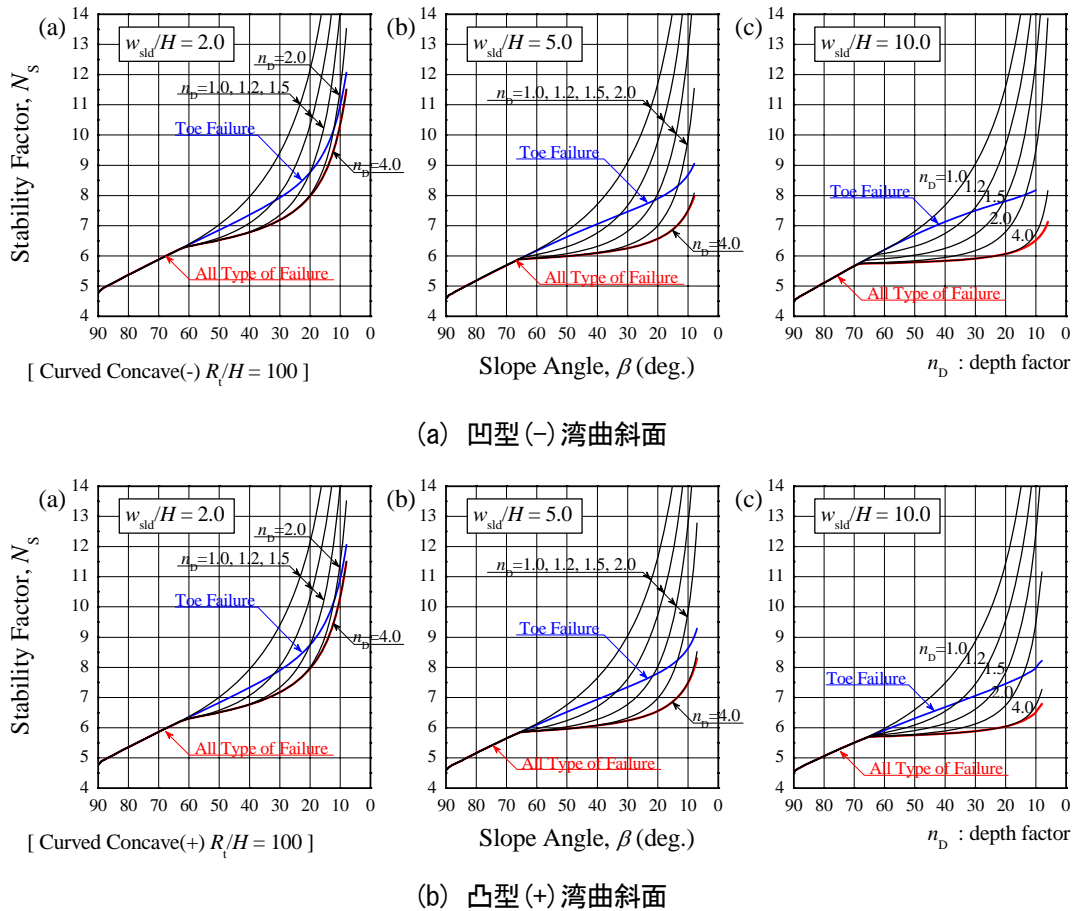


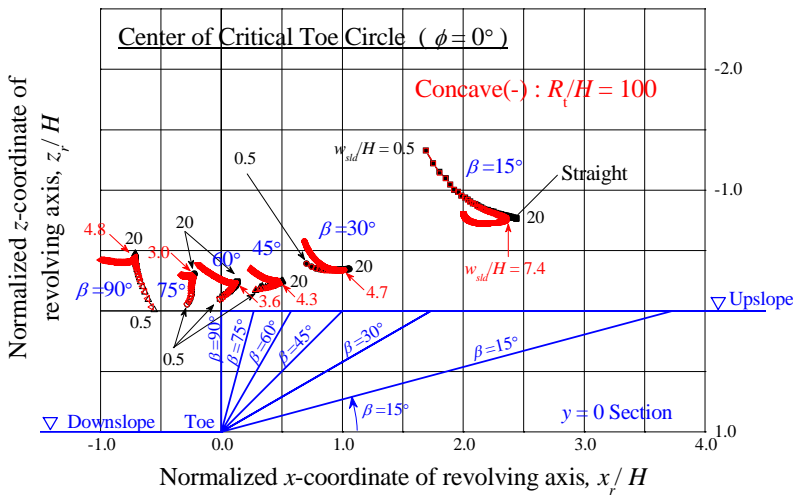
図 - 14 湾曲斜面における斜面の傾斜角と安定係数の関係 [安定図表]



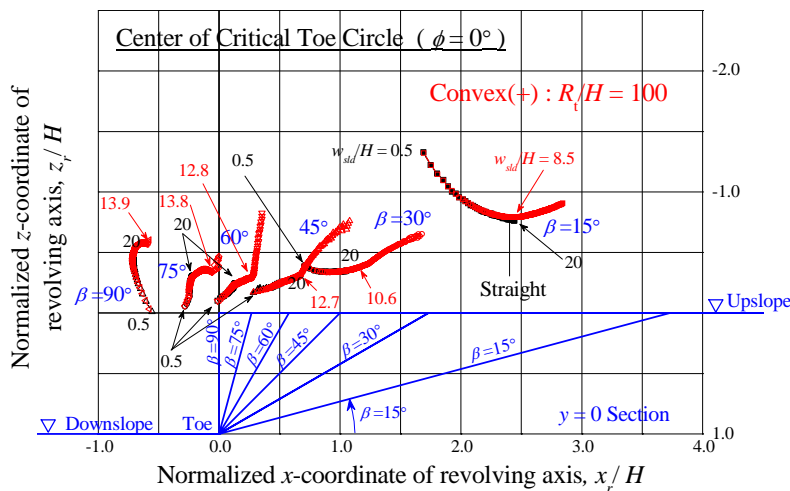
### 3.2.2 臨界すべり面のサイズと位置

図 - 15 は、曲率半径 $R_t/H = 100$ の湾曲斜面について、仮定する正規化すべり面幅 $w_{sl}/H$ と斜面の傾斜角 $\beta$ により、斜面先破壊に対する臨界円の中心軸( $x_r, z_r$ )がどのように推移していくかを示したものである。比較のため、直線斜面における結果も同図に示す。この図より、湾曲斜面では、仮定するすべり面幅がある程度の大きさまでは、臨界円の中心軸が直線斜面の場合とほぼ同じ位置にあることが分かる。これは、湾曲の方向に依らず共通に見られることである。図には示していないが、湾曲斜面と直線斜面で中心軸がほぼ等しくなる時のすべり面幅は、湾曲斜面の曲率半径が小さいほど小さくなる。仮定するすべり面幅が大きくなると、凹型斜面では左側（斜面から離れる方向）に中心軸が移動していき、凸型斜面では右側（斜面に近づく方向）に移動していることが分かる。凹型斜面では、 $y$ の値が大きくなると斜面の断面形状は $y = 0$ 断面に比べて左側に位置し、また凸型斜面では右側に位置するため、湾曲の方向により中心軸が移動すると考えられる。

図 - 16 は、 $\beta = 45^\circ$ の斜面について、臨界すべり面幅となるときの臨界円の形状を、斜面先破壊とすべての破壊形式を考慮した場合について描いたものである。この図より、すべての破壊形式を考慮した場合、湾曲斜面での臨界すべり面は直線斜面のものよりも深く、またサイズもひと回り大きいことが分かる。

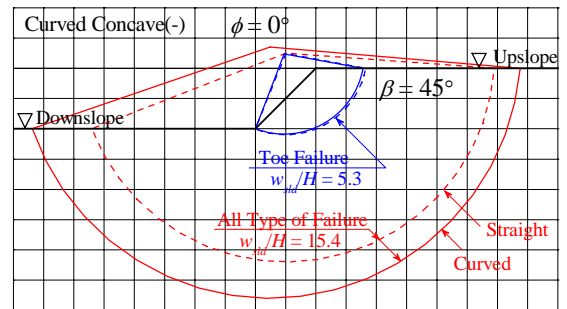


(a) 凹型(-)湾曲斜面

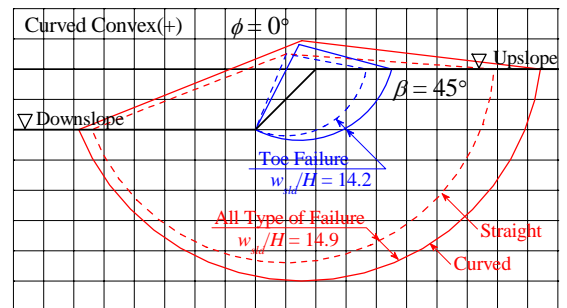


(b) 凸型(+)湾曲斜面

図 - 15 斜面先破壊に対する臨界円の中心座標 (湾曲斜面)



(a) 凹型(-)湾曲斜面



(b) 凸型(+)湾曲斜面

図 - 16 斜面先破壊に対する臨界円の形状 (湾曲斜面 $\beta = 45^\circ$ ,  $y = 0$ 断面)

#### 4. おわりに

均質な粘性土が形成する直線斜面および湾曲斜面の三次元条件におけるすべりに対する安定性を、回転楕円体により規定するすべり面を用いて極限平衡法により解析した。通常の二次元解析では考慮されないすべり面の幅（すべり面の両側端部のせん断抵抗）の影響、および斜面形状の湾曲の影響を中心に解析結果を比較・検討した。その結果は安定図表等にまとめて示したが、その特徴を以下のようにまとめることができる。

- ・【直線斜面】 すべり面の有限幅が考慮されすべり面端部のせん断抵抗の効果により、三次元解析で得られる安定係数（安全率）は二次元解析に比べると大きめになることが分かった。このことは、「すべり土塊を構成する土質の強度が分かっているときには、二次元解析は斜面の安定性を過小に（安全側に）評価していること」を示しているが、一方で、「強度定数を逆解析により推定する場合には強度を過大に評価してしまい、対策工の設計等においては危険な設計になってしまう可能性がある」ことを示唆している。
- ・【直線斜面】 二次元解析と比較すると、すべり面の有限幅と端部の効果を考慮できる三次元解析では臨界すべり面の深さは浅くなる傾向が認められた。このことは「底部破壊に比べて斜面先破壊がより支配的になること」、また、「臨界すべり面が底部破壊の場合でも、すべり面が必ずしも基盤面に達するわけではなく臨界状態を与える特定の深度（臨界深さ）が存在することを」を示している。
- ・【直線斜面】 すべり面の幅が大きくなるにつれて、すべり土塊中央での臨界すべり面形状は二次元解析のものに漸近し、一方、安全率および安定係数は減少する傾向を示すものの、すべり面幅が無限大になっても端部効果により二次元解析で得られる値より明らかに大きいことが分かった。
- ・【湾曲斜面】 斜面の湾曲の影響は、斜面先破壊だけに限定すると、直線斜面と比べて凹型では安全率および安定係数が増加し、凸型では減少する傾向が認められた。臨界すべり面は凹型ではより浅く、凸型斜面ではより深くなる傾向が認められた。ただし、底部破壊を含めたすべての破壊形式を考慮した臨界安定係数で比較すると、どちらの斜面においても湾曲の方向に依らず直線斜面の場合よりも大きな安定係数が得られることが分かった。
- ・【湾曲斜面】 湾曲斜面では、すべり面の幅が増大するにつれて安全率は最初減少傾向を示すが、斜面の湾曲の方向に依らず、安全率および安定係数が最小となるすべり面幅が存在することがわかった。このことは、「地質条件等によってすべり面の幅に制限がある場合以外でも、斜面の高さと湾曲度を関数とする臨界すべり面幅が一意に決まること」を示している。ただし、凸型斜面よりも凹型斜面の方が、臨界すべり面幅は大きい傾向が見られた。

#### 参考文献

- 1) Ugai, K. (1985), Three-Dimensional Stability Analysis of Vertical Cohesive Slopes, JGS, Soils and Foundations, Vol.25, No.3, pp.41-48.
- 2) R. Baker and M. Garber, Variational approach to slope stability, 9th ICSMFE, Vol.2, pp.9-12, 1997
- 3) K. Terzaghi, Theoretical Soil Mechanics, Chapter IX: Stability of Slopes, pp.144-181