

# 地盤への剛体貫入に関する大変形問題への新しい試み

岐阜大学 正会員 森口周二  
岐阜大学 国際会員 八嶋厚、沢田和秀

## 1. はじめに

土質調査において、サンプリングやサウンディングが行われるが、その際に地盤の乱れの問題を避けて通ることはできない。特に、サンプリング時の地盤材料の乱れは、その後の室内試験の結果に大きな影響を及ぼす。このように、貫入問題は工学的に興味深い問題であるが、貫入時の応力場の変化やメカニズムは完全には明らかにされていない。本研究では、流体を対象とした解析手法（Eluer 型）を用いて、地盤への剛体貫入に伴う地盤材料の変形を解析することにより、解析手法の有効性を検証する。

## 2. 地盤材料のせん断強度を考慮した流体モデル

本研究では、地盤材料を 1 相系の流体として仮定し、Eluer 的に変形を記述することにより、大変形問題を解く。そのため、地盤材料をある種の流体として仮定する必要がある。流体はその特性から 2 種類に分類される。1 つは Newton 流体であり、もう 1 つは非 Newton 流体である。Newton 流体は水や気体のように時間的に粘性が変化しない流体であり、反対に非 Newton 流体は粘性が変化する。非ニュートン流体の代表的なものとしては、擬塑性流体・ダイラタント流体・Bingham 流体が挙げられる。過去に土石流や液状化地盤の側方流動を、非 Newton 流体モデルを用いて表現する研究<sup>1)2)3)</sup>が行われており、擬塑性流体モデルと Bingham 流体モデルが用いられている。本研究では Bingham 流体モデルを用いる。Bingham 流体モデルは以下の式で表現される。

$$\tau = \eta_0 \dot{\gamma} + \tau_0 \quad (1)$$

ここで、 $\tau$  はせん断応力、 $\dot{\gamma}$  はせん断ひずみ速度、 $\eta_0$  は降伏後の粘性係数、 $\tau_0$  はせん断強度を示す。図 1 は、式(1)の Bingham 流体モデルの挙動を示したものである。Bingham 流体モデルは、せん断ひずみ速度～せん断応力関係においてせん断応力軸に切片を有する 1 次関数として表現される。この切片にあたる値がせん断強度である。ここで、Bingham 流体モデルに地盤材料のせん断強度を導入する。本研究では、モール・クーロンの破壊規準を用いて地盤材料のせん断強度を定義する。すなわち、

$$\tau_0 = c + \sigma \tan \phi \quad (2)$$

ここで、 $c$  は粘着力、 $\sigma$  は有効応力、 $\phi$  は内部摩擦角を示す。式(2)を用いて式(1)を変形すると、次式を得る。

$$\tau = \eta_0 \dot{\gamma} + c + \sigma \tan \phi \quad (3)$$

上式は地盤材料のせん断強度を考慮した Bingham 流体モデルである。ただし、本研究では、地盤材料を 1 相系の流体として仮定するために、有効応力の概念はない。そのため、拘束圧に対応する流体の圧力  $p$  で代用することにより次式を得る。

$$\tau = \eta_0 \dot{\gamma} + c + p \tan \phi \quad (4)$$

注意として、流体の圧力は全応力に対応するため、解析には全応力定義による  $\phi$  を用いる必要がある。

式(4)により、地盤材料の変形特性を表現できるモデルが得られたが、式(4)を直接流体の解析手法に用いることはできない。本研究で用いる CIP 法をはじめとして、ほとんどの流体の解析手法は Navier-Stokes 方程式を支配方程式とするものであり、言い換えれば、Newton 流体を対象とした解析手法である。対して本研究で用いる流体モデルは、非 Newton 流体モデルである。そのため、非 Newton 流体の粘性を Newton 流体の粘性として擬似的に表現する必要がある。Newton 流体の粘性係数はせん断応力をせん断ひずみ速度で除することにより表現できる。同様に、式(4)の両辺をせん断ひずみ速度で除することにより、次式の見かけの粘性係数  $\eta'$  が

得られる。

$$\frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \eta' = \eta_0 + \frac{c + p \tan \phi}{\dot{\gamma}} \quad (4)$$

見かけの粘性係数  $\eta'$  は、図 2 中の点線の傾きとして表現されるものであり、その値はせん断ひずみ速度に依存して変化する。この見かけの粘性係数を支配方程式に代入し、数値計算を行う。ただし、式(4)を見て分かるように、 $\dot{\gamma}$  が 0 になれば  $\eta'$  は無限大となる。これでは数値解析の中で扱えないため、 $\eta'$  の最大値  $\eta'_{\max}$  を定義する。このとき式(4)は次式で表現される。

$$\begin{aligned} \eta' &= \eta_0 + \frac{c + p \tan \phi}{\dot{\gamma}} \quad (\text{if } \eta' \leq \eta'_{\max}) \\ \eta' &= \eta'_{\max} \quad (\text{if } \eta' > \eta'_{\max}) \end{aligned} \quad (5)$$

このとき、せん断応力～せん断ひずみ速度関係では、図 3 の実線で示した Bi-linear 型の挙動を示すことになる。 $\eta'_{\max}$  の値に小さな値を設定するとモデルの挙動に影響を与えるため、出来るだけ大きな値を設定する。(本研究では  $10^8 \text{Pa} \cdot \text{s}$ )

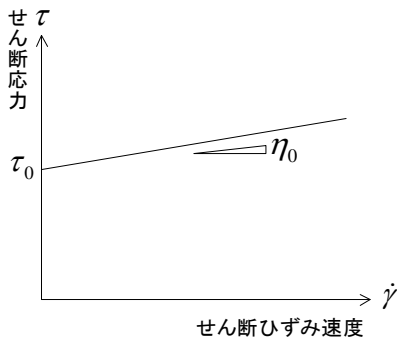


図 1 Bingham 流体モデルの挙動

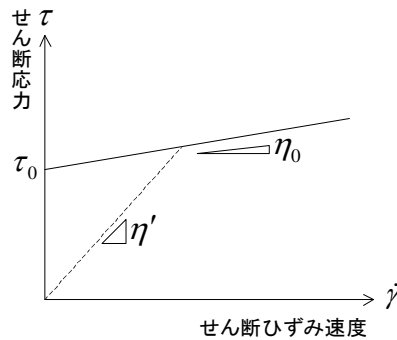


図 2 見かけの粘性係数

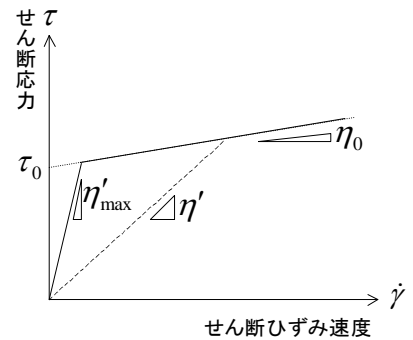


図 3 Bi-linear 型流体モデル

### 3. 数値解析手法

本研究では、流体解析を対象として開発された CIP(Constrained Interpolated Profile)法<sup>4)</sup>を解析手法として用いる。CIP 法は、刻々と変化する流体の物理量の空間分布を精度よく表現することが可能であり、特に自由境界面において高い精度で時間発展計算を行うことが可能である。数値流体力学の分野では、幅広い問題に CIP 法が用いられており、その有効性が確認されている。また、近年の研究では、解析領域内で固体と流体の相互作用問題に関する解析事例が報告されており、固気液共存場における統一解法として注目されている<sup>5)</sup>。以下では CIP 法の概要と本研究に必要な数値解析上のテクニックについて述べる。

圧縮性粘性 Newton 流体を対象とした場合、CIP 法では以下に示す式を支配方程式として用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + b_i \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\rho C_s^2 \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (8)$$

ここで、 $u$  は速度、 $\rho$  は密度、 $\eta$  は粘性係数、 $b$  は外力、 $p$  は圧力、 $C_s$  は音速を示す。式(6)は Navier-Stokes

方程式、式(7)は質量保存則、式(8)は圧力変化に関する方程式である。式(6),(7),(8)を用いて、物理量（速度  $u$ 、密度  $\rho$ 、圧力  $p$ ）の時間発展を表現することができる。しかし、物性値（粘性係数  $\eta$ 、音速  $C_s$ ）については支配方程式がなく、物性の異なる混相場を解く際には何らかの処理が必要になる。CIP 法では密度関数  $\phi$  を用いて物性値の変化を記述する。密度関数  $\phi$  は各材料に対してそれぞれ定義され、計算メッシュ内に存在する各材料の占有率を示し、0~1 の値で表現される。例えば、空気と水の混相場を考えれば、空気と水に対してそれぞれの密度関数  $\phi_{air}$  と  $\phi_{water}$  が定義される。このとき、あるメッシュにおいて  $\phi_{air}=1$  で  $\phi_{water}=0$  であれば、そのメッシュ内は全て空気となる。複数の材料が存在する場合も同様に、各材料に対して密度関数が定義される。その場合、各メッシュ内の物性値は以下の式で定義される。

$$q = \sum \phi_i q_i \quad (0 \leq \phi_i \leq 1) \quad (9)$$

ここで  $q$  は物性値（粘性係数  $\eta$ 、音速  $C_s$ ）を示す。密度関数の時間発展は以下の方程式により計算する。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} = 0 \quad (10)$$

CIP 法では、式(6)~(8)と式(10)を解くことにより、流体の運動を表現する。これらの式を非移流項と移流項に分離して段階的に解く。式(6)~(8)と式(10)は統一して以下の式で表現される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = RHS \quad (11)$$

ここで、 $f$  は物理量（ $u, \rho, p$ ）、 $RHS$  は式(6)~(8)と式(10)の右辺項を示す。式(11)を非移流項と移流項に分離すれば以下のようなになる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = RHS \quad (\text{非移流項}) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{移流項}) \quad (12)$$

CIP 法は、特に移流項の取り扱いに大きな特徴を持つ。具体的には、離散化された計算点間の補関数の構築方法に特徴をもつ。ここで1次元の移流問題を考える。1次元の移流方程式は次式で示される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

ある時刻における物理量  $f$  の空間分布が図 4(a)の実線で表現されるとする。この空間分布が式(13)の移流方程式に従い移流するとすれば、速度  $u$  で移動し、時間  $\Delta t$  後には図 4 中の破線のような空間分布に変化する。しかしながら、計算点は有限であるため、連続した空間分布全てを記憶しておくことは不可能であり、図 4(b)のように、移動後に各計算点での代表値のみが得られる。図 4(b)の情報から図 4(a)の破線の空間分布を想像することは困難であり、例えば線形関数で補完すれば図 4(c)のようになり、もとの空間分布と異なるものとなる。また、高次の補完関数を用いる方法も提案されているが、1区間の補完関数の構築に周辺の複数の計算点情報を用いるため、数値拡散が発生しやすい。対して、CIP 法では3次関数を補完関数とする。このとき、CIP 法では式(13)から得られる物理量の空間一階微分値に関する移流方程式を用いる。空間一階微分値に関する移流方程式は次式で表現される。

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = -g \frac{\partial u}{\partial x} \quad (14)$$

ここで、 $g (= \partial f / \partial x)$  は  $f$  はの空間一階微分値である。式(13)と式(14)を用いることにより、各計算点で物理量とその空間一階微分値の2つの情報が得られるため、2点間の情報のみで3次精度の補関数の構築が可能となる。空間一階微分値を考慮するという事は、図 4(d)中の矢印の情報が加わることになり、この矢印に沿って補関数を構築することができる。一見スプライン補間と類似しているように見えるが、空間一階微分値が式(14)から得られるということがCIP法の大きな特徴であり、これは、空間一階微分値の時間的な連続性を考慮していることに他ならない。スプライン補間は補関数に人工的な滑らかさを与えているのに対して、

CIP法では実際の空間分布の特性を考慮した滑らかさを与えているのである。このために、物性値が大きく異なる流体の接触面でも精度のよい解析が可能となる。

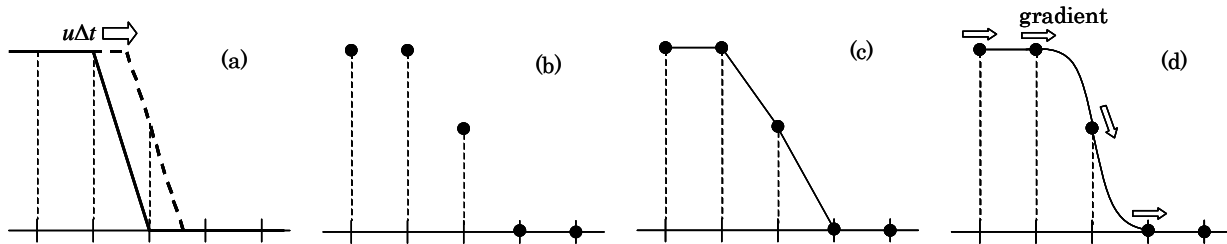


図4 CIP法による補間

ここで、式(6)で示した Navier-Stokes 方程式に対して式(4)で示される見かけの粘性係数を導入する。Navier-Stokes 方程式中の粘性係数  $\eta$  に見かけの粘性係数  $\eta'$  を代入すれば以下の式が得られる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \frac{\eta'}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\eta'}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + b_i \quad (15)$$

上式を用いて支配方程式の中で地盤材料の変形特性を表現することになるが、上式では見かけの粘性係数  $\eta'$  を十分な精度で扱えない。この理由は、Navier-Stokes 方程式は Newton 流体を対象としたものであり、粘性係数は一定と仮定して定式化しているためである。見かけの粘性係数  $\eta'$  はせん断ひずみ速度に依存するため、空間的に変化する。次式は  $\eta'$  の空間勾配を考慮した定式化により得られる運動方程式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \eta' \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \eta' \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + b_i \quad (16)$$

本研究では、上式を式(6)の代わりに用いる。

本研究では、剛体の地盤中への貫入問題を取り扱うため、計算の中で剛体運動の影響を考慮しなければならない。剛体運動に伴う流体の運動の表現方法<sup>5)</sup>については、既に提案されており、本研究でもその方法を用いる。この方法では、密度関数  $\phi$  を用いて運動方程式の中で剛体運動の影響を表現する。剛体の密度関数を  $\phi_r$  として式(16)で剛体運動の影響を考慮すれば以下の式を得る。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \eta' \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \eta' \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + b_i \right\} (1 - \phi_r) + \frac{(U_i - u_i)}{\Delta t} \phi_r \quad (17)$$

ここで、 $U$  は剛体の運動速度を示す。上式を用いれば、剛体部分については設定した速度で運動し、それ以外の部分については式(16)の運動方程式に従って運動する。つまり、密度関数を用いて支配方程式を変化させていることになる。式(17)により、剛体表面の地盤材料は剛体と同じ速度で動くことになり、解析の中で剛体の運動を考慮することができる。

#### 4. 数値解析

前述の数値解析手法を用いて、剛体の地盤中への貫入解析を行った。地盤を構成する材料は Newton 流体、粘性材料、粒状材料の3種類として、それぞれ Case1、Case2、Case3 とする。また、2次元と3次元の両方で解析を行った。2次元モデルを図5に、3次元解析モデルを図6に示す。表1は解析に用いた構成式(式(5))のパラメータを示しており、2次元解析と3次元解析で共通である。また、2次元および3次元解析条件を表2に示す。解析では地盤上の剛体を一定の速度(0.02m/s)で地盤中へ貫入する。そのときの地盤材料の違い

による変形挙動の違いについて調べた。

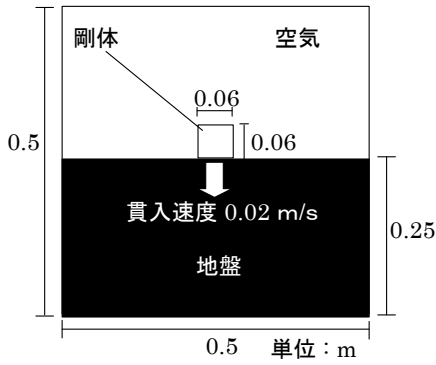


図5 2次元解析モデル

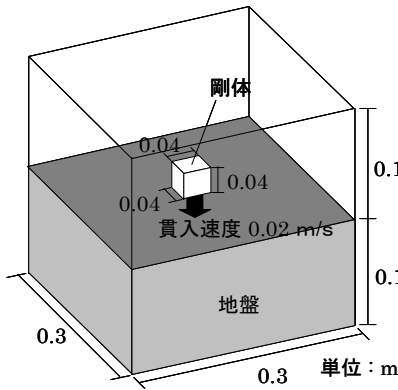


図6 3次元解析モデル

表1 解析パラメータ

	Case1	Case2	Case3
$\eta$ (Pa·s)	0.002	—	—
$\eta_0$ (Pa·s)	—	1.0	1.0
$c$ (Pa)	—	0.0	1000.0
$\phi$ (degree)	—	30.0	0.0
$\eta'_{max}$ (Pa·s)	$1.0 \times 10^8$	$1.0 \times 10^8$	$1.0 \times 10^8$

$\eta$  : 粘性係数                       $\eta_0$  : 最小粘性係数  
 $c$  : 粘着力                          $\phi$  : 内部摩擦角  
 $\eta'_{max}$  : 見かけの粘性係数の最大値

表2 2次元解析条件

	空気	地盤材料
$\rho$ 密度 ( $kg/m^3$ )	1.25	1000.0
$C_s$ 音速 ( $m/s$ )	340.0	1500.0
$\Delta x, \Delta y$ メッシュサイズ (m)	$\Delta x = 0.01$	$\Delta y = 0.01$
$N_x \times N_y$ メッシュ数	50 × 50	
$g$ 重力加速度 ( $m/s^2$ )	9.81	

表3 3次元解析条件

	Air	Geomaterial
$\rho$ 密度 ( $kg/m^3$ )	1.25	1000.0
$C_s$ 音速 ( $m/s$ )	340.0	1500.0
$\Delta x, \Delta y$ メッシュサイズ (m)	$\Delta x = 0.01$	$\Delta y = 0.01$ $\Delta z = 0.01$
$N_x \times N_y \times N_z$ メッシュ数	30 × 30 × 30	
$g$ 重力加速度 ( $m/s^2$ )	9.81	

図7～9は2次元解析結果、図10～12は3次元解析結果であり、地盤材料の表面形状の時間的な変化を示している。3次元解析結果については、各Caseについて全断面および半断面の結果を示している。解析結果は、2次元および3次元解析で同じ傾向を示している。Case1 (Newton 流体) では、剛体の貫入に伴い、地盤は変形するが、剛体が完全に地盤中へ入った後に地盤表面は水平に戻ろうとする。Case2 (粒状材料) では、剛体が完全に地盤中へ入った後に、剛体上部に地盤材料が移動するが、表面にある角度を保つ。また、Case3 (粘性材料) では、剛体の貫入後に地盤材料は剛体上部に移動せず、剛体が通過した形状そのままを保とうとする。これらの結果は、それぞれの材料の特性を適切に示しており、剛体の運動による影響を適切に表現できていると考えられる。

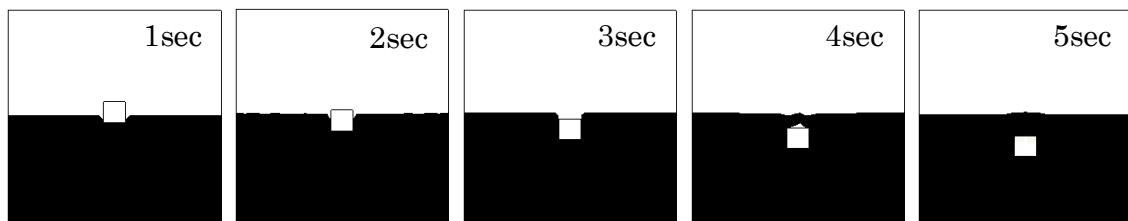


図7 表面形状の時間的変化 (2D Case1:Newton 流体)

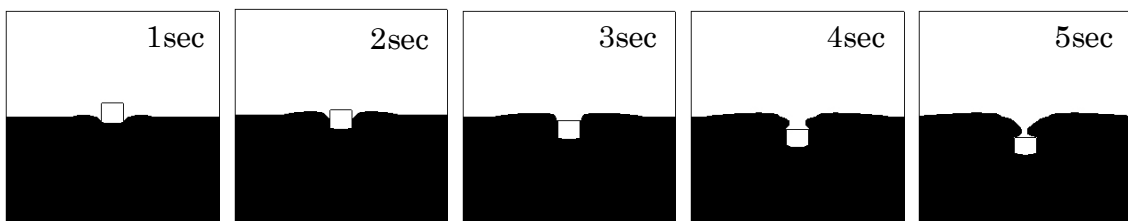


図9 表面形状の時間的変化 (2D Case2 粒状材料)

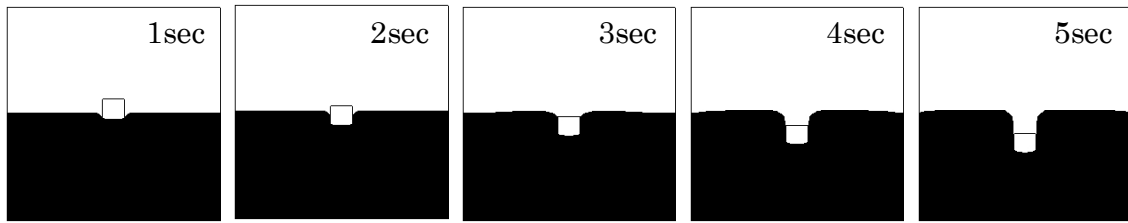


図 8 表面形状の時間的変化 (2D Case3 粘性材料)

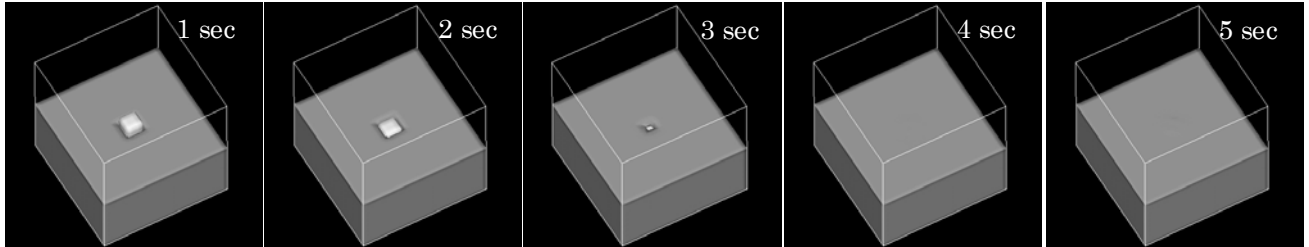


図 10(a) 表面形状の時間的変化 (全断面 3D Case1:Newton 流体)

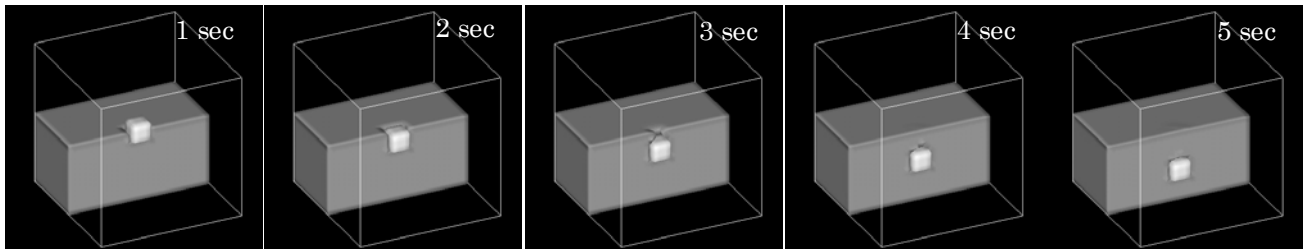


図 10(b) 表面形状の時間的変化 (半断面 3D Case1:Newton 流体)

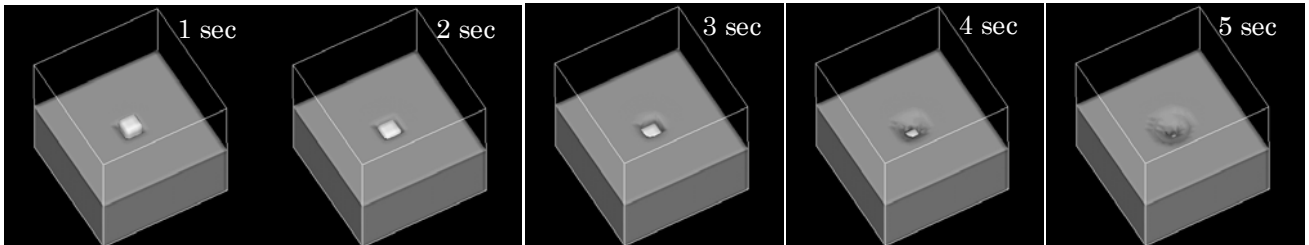


図 11(a) 表面形状の時間的変化 (全断面 3D Case2 粒状材料)

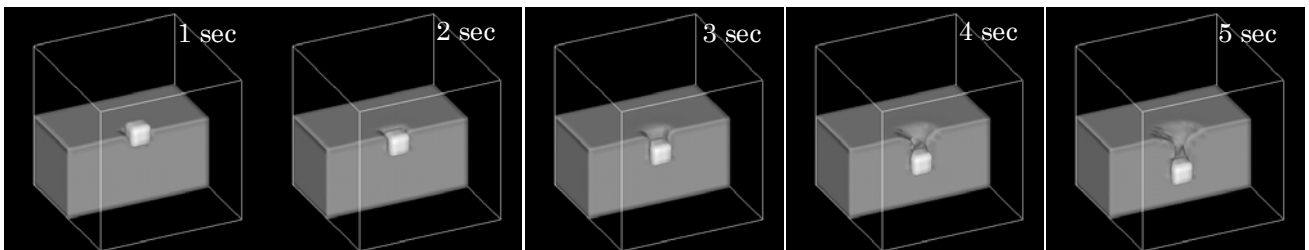


図 11(b) 表面形状の時間的変化 (半断面 3D Case2 粒状材料)

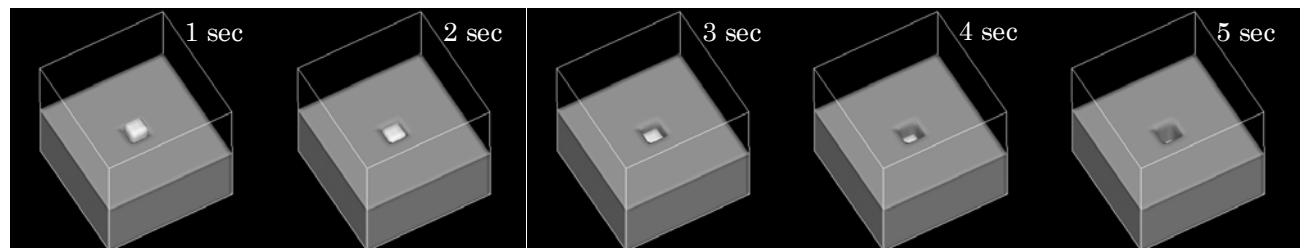


図 12(a) 表面形状の時間的変化 (全断面 3D Case3 粘性材料)

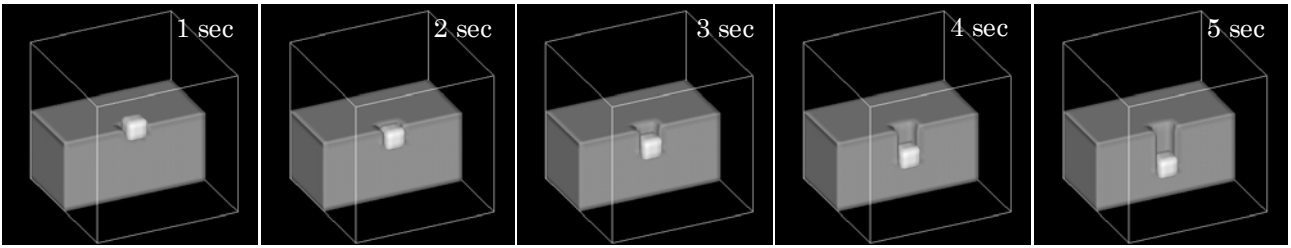


図 12(b) 表面形状の時間的変化 (半断面 3D Case3 粘性材料)

上記の解析結果は、異なる材料の表面形状の違いを検証したのみであり、定性的に解析手法の有効性は確認されたが、定量的な評価がなされていない。そこで、本研究では、解析中で生じている応力場の検証として、Prandtl の支持力公式<sup>6)</sup>との比較を行った。これは、貫入問題とは異なるが、Prandtl の支持力公式は既に様々な手法により正解値であることが確認されているため、比較材料として用いた。Prandtl は直接基礎を対象として、図 12 に示したような滑り線が発生するものとして以下の極限支持力を求める式を提案した。

$$q_u = (2 + \pi)c \cong 51.4c \quad (18)$$

ここで、 $q_u$  は極限支持力、 $\pi$  は円周率、 $c$  は粘着力である。式(18)はいくつかの仮定を含んでいる。まず、地盤材料は純粋な粘性材料と仮定している。また、基礎底面と地盤表面の間に摩擦が働かないものとし、自重の影響も無視している。この仮定内においては、式(18)は正解値であり、極限平衡法や剛塑性有限要素解析からも同様の解が得られることが確認されている。

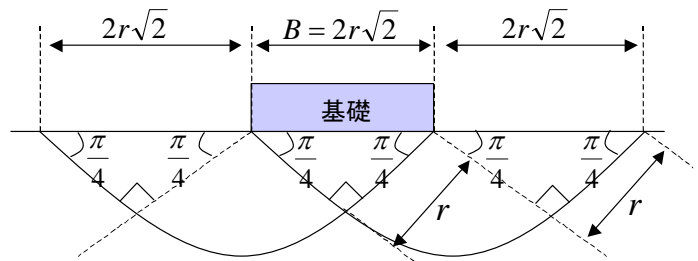


図 13 Prandtl 型すべり線

図 14 に解析に用いた解析モデルを、表 4 に本解析に用いた解析パラメータと解析条件を示す。本解析は 2 次元解析で行った。対称性を考慮して、判断面で解析を行っている。解析領域の側面および上下面 (解析境界面) には Slip 条件 (摩擦が働かない条件) を採用した。また、Prandtl の支持力公式で用いられる仮定を表現するために、地盤材料は純粋な粘性材料とし、基礎底面と地盤表面の間にも Slip 条件を適用している。さらに、自重の影響を無視するために、重力を外力として作用させていない。

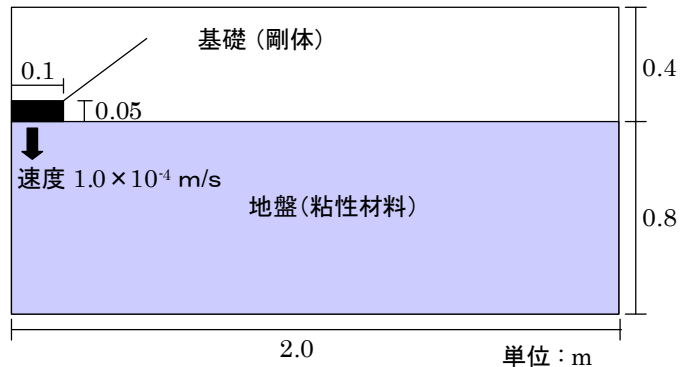


図 14 解析モデル

解析では、地盤上に基礎 (剛体) を設置し、基礎を一定速度 ( $1.0 \times 10^{-4}$ ) で下方に移動させ、そのときに基礎底面に作用する鉛直応力の合計を地盤反力として算出した。ここで、基礎の移動速度に小さな値を用いている理由は、貫入の影響を防ぐためであり、本解析で用いた移動速度以下では、算出される地盤反力は変化しないことを確認している。解析に用いた粘着力の値は 1,2,3Pa の 3 種

表 4 解析パラメータと解析条件

	空気	地盤材料
$\rho$ 密度 ( $kg/m^3$ )	1.25	1800.0
$C_s$ 音速 ( $m/s$ )	340.0	10000.0
$\eta_0$ 最小粘性係数 ( $Pa \cdot s$ )	—	1.0
$c$ 粘着力 ( $Pa$ )	—	1 or 2 or 3
$\phi$ 内部摩擦角 (deg ree)	—	0.0
$\Delta x, \Delta y$ メッシュサイズ ( $m$ )	$\Delta x = 0.02$	$\Delta y = 0.02$
$N_x \times N_y$ メッシュ数	100 × 60	
$g$ 重力加速度 ( $m/s^2$ )	0.0	

類であり、それぞれの粘着力の値に対する地盤反力を算出した。

表 5 は本解析から得られた地盤反力である。また、比較のために、Prandtl の支持力公式から得られる値を理論解として表 5 中に示している。表 5 より、解析結果は Prandtl の解とほぼ一致しており、本解析のようなシンプルな条件下においては、十分な精度で理論解を再現することが確認された。

表 5 解析結果と理論値の比較

粘着力 (Pa)	1.0	2.0	3.0
理論解 (Pa)	5.14	10.28	15.42
解析解 (Pa)	5.31	10.49	15.35

## 5. まとめ

本研究では地盤への貫入問題について新たな解析の枠組みを適用した。用いた解析手法は数値流体力学の分野で高度に発展した CIP 法であり、地盤材料は、Bingham 流体モデルにモール・クーロンの破壊規準を適用することで、特殊な流体として表現した。解析結果より、本研究で用いた解析手法が、貫入問題について有効であることが確認された。今後、サンプラーの地盤への押し込みに伴う地盤内部の応力場の変化などについて検証を行う予定ではあるが、そのためには、現在の解析手法の一部を改良する必要がある。その改良点は、剛体表面とその周辺の地盤材料との摩擦の与え方である。本研究では、式(17)を用いて、剛体の運動の影響を考慮しているが、この式を用いた場合、剛体の表面において、地盤材料は剛体と全く同じ速度で移動することになる。つまり、剛体表面で地盤材料のすべりが全く発生しないという条件での解析を行っていることになる。今後、この問題点を克服するために、式(17)に対して改良を加え、本研究で用いた解析手法を各種貫入問題に適用していきたい。

## 参考文献

- 1) Trunk F.J., Dent D.J. and Lang T.E., Computer modeling of large rockslides, Journal of the Geotechnical Division, ASCE, 112 (GE 3), pp348-360, 1986
- 2) Hunger, O., A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches. Canadian Geotechnical Journal **32**, pp. 610-623, 1995.
- 3) Uzuoka R., Yashima A., Kawakami T. and Konrad J-M., Fluid dynamics based prediction of liquefaction induced lateral spreading, Computers and Geotechnics 22 3/4, pp234-282, 1998
- 4) Yabe, T. and Aoki, T., A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic Polynomial Interpolation. *Comput. Phys. Commn.* **66**, pp. 219-232, 1991.
- 5) 矢部孝, 固体・気体・液体の統一解法を目指す CIP 法, ながれ, 日本流体力学学会, **15** pp367-375, 1998
- 6) Prandtl, L. (1920): "Über die Härte plastischer Körper", Nachr. Ges. Wiss. Gött., Math.Phys. Kl., Vol. 12, pp. 74-85.