

均一粒状体の間隙率に対する壁効果の分類 ～その定式化と数値シミュレーション～

名城大学大学院 学生員 木村哲晃
名城大学工学部 正会員 板橋一雄
名城大学大学院 学生員 姫野 圭

1. はじめに

密度や間隙比は、土の工学的性質と密接な関係があり、特にせん断強度をはじめとする種々の力学的特性を支配する重要な要素である。筆者の一人は、乱さない洪積熱田砂の供試体密度が、その大きさの影響を受けることに気がつき、その供試体密度の誤差原因の一つとして、表面付近の乱れを考え、密度の差異が供試体の表面積と体積の比率で評価されることを提案してきた¹⁾。さらに、モデル実験によく用いられている積層体の密度が、詰める容器の大きさによって異なり、それが容器の表面積と体積の比率に関係することも示している²⁾。ある容器への粒子の充填状態に影響する要因は、容器形状と大きさ、粒子の形状特性・表面特性ならびに粒度特性があるが、それらの要因が複雑に絡み合って充填構造が形成される。そこで、本研究では、四角柱容器への均一球の規則的充填という簡単な仮定の下での間隙率に基づく定式化とシミュレーション³⁾を実施し、間隙率変化に対する壁効果を定量的に示した。また、均一ステンレス球のランダム充填実験を実施し、間隙率での整理を行い、比較・検討したので、ここに報告する。

2. 形状係数の提案⁴⁾

容器形状（高さ、内径など）や粒子径の異なる材料の充填実験においては、間隙率の変化する傾向は、一般的に容器高さや容器内径との関係で整理されるが、一定の傾向的変化は読み取れるものの、その表現方法は簡単ではない。そこで、容器の大きさを評価できるような単一の指標を考えた。容器に粒子を詰めていくと、容器と粒子との境界面により、粒子の詰まり方が乱される。そこで、容器形状を表現する一つの係数として、容器の全表面積 A と体積 V の比を考え、形状係数と定義した。容器内径 D (cm)・高さ h (cm)の円柱容器の場合および容器一辺の長さ L (cm)・高さ h (cm)の四角柱容器の場合には、容器の形状係数は以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{体積} & : (\text{円柱容器}) V = (D/2)^2 \pi h \qquad (\text{四角柱容器}) V = L^2 h \\ \text{表面積} & : (\text{円柱容器}) A = (D + 2h) D \pi / 2 \qquad (\text{四角柱容器}) A = 2L(L + 2h) \\ \text{形状係数} & : (\text{円柱容器}) R = A/V = 2/h + 4/D \qquad (\text{四角柱容器}) R = A/V = 2/h + 4/L \end{array}$$

この定義から、形状係数 R (cm^{-1})は小さい容器ほど大きな値となり、大きな容器ほど小さな値を取ることとなる。つまり、容器の小ささを表す係数と考えられる。

3. 充填シミュレーションの定義

3-1. 立方体充填

粒子の直径を d として、一辺に n 個並んだ場合を考え、これを容器の大きさとして最初に決定する。このときの容器は一辺の長さが nd となり、図-1の平面図に示すような正方形平面を持つ。この容器に、粒子を1万個まで1個ずつ充填するシミュレーションを行った。

図-1の断面図Aは、容器に粒子が1個充填された場合を示す。このときの、容器体積と形状係数と間隙率は以下ようになる。

Classification of Wall Effects to Porosity of Unified Granular Materials : Tetsuaki KIMURA, Kazuo ITABASHI, Kei HIMENO (Meijo Univ.)

容器体積： $V = n \cdot d \times n \cdot d \times d = n^2 d^3$

形状係数： $R = \frac{4}{nd} + \frac{2}{d} = \frac{2}{d} \cdot \frac{n+2}{n}$

間隙率： $p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{\pi}{6n^2}$

容器の体積は、一層目が完全に充填されるまで変化しないので形状係数は不変であり、間隙率のみが粒子の増加に伴って減少していくと考えられる。

図-1の断面図Bは、一層目が完全に充填された場合を示す。そのときの粒子数は、 n^2 個である。このときの間隙率について計算すると、以下ようになる。

間隙率： $p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{\pi}{6}$

図-1の断面図Cは、一層目が完全に充填された後、二層目に1個だけ粒子が入った場合を示す。

そのときの粒子数は、 n^2+1 個である。立方体充填では、一層目の粒子の直上に粒子が乗るため容器高さは $h=2d$ となる。このときの容器体積と形状係数と間隙率は、以下ようになる。

容器体積： $V = n^2 d^2 \times 2d = 2n^2 d^3$

形状係数： $R = \frac{4}{nd} + \frac{2}{2d} = \frac{2}{d} \cdot \frac{n+2 \cdot 2}{2n}$

間隙率： $p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{\pi(n^2+1)}{6 \cdot 2n^2}$

二層目が完全に充填された場合について考える。立方体充填では、どの層も粒子配列が同じであるため、二層目までの全粒子数は $2n^2$ となる。形状係数は変わらないので、間隙率を求めると以下ようになる。

間隙率： $p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{\pi}{6}$

このように、立方体充填では、ある層まで粒子が完全に充填された場合、間隙率は粒子径や容器の大きさにかかわらず一定になることがわかる。以上のことより、形状係数と間隙率の変化についてまとめると、以下に示すような一般式が得られる。

形状係数： $R = \frac{4}{nd} + \frac{2}{md} = \frac{2}{d} \cdot \frac{n+2m}{m \cdot n}$

間隙率： $p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{\pi}{6} \cdot \frac{N}{m \cdot n^2}$

ここに、 N は全粒子数、 m は層数を表している。

3-2. 菱面体充填

粒子の直径を d として一層目にきっちり詰められる容器の大きさを考える。菱面体充填の一層目は図-2の平面図のようになる。この容器に、粒子を1万個まで1個ずつ充填するシミュレー

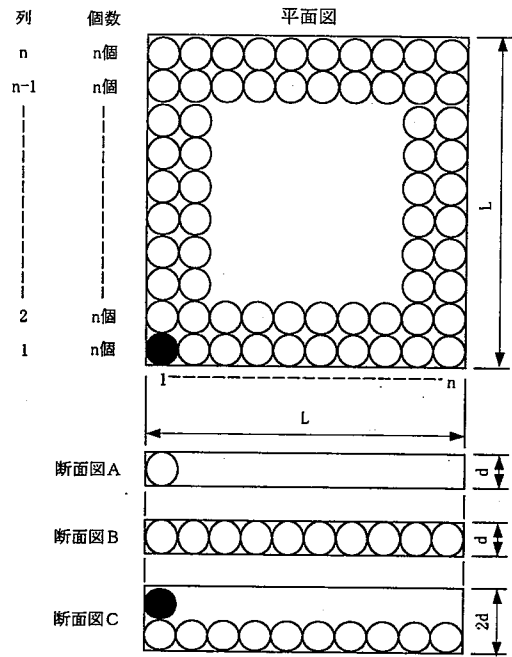


図-1 立方体充填

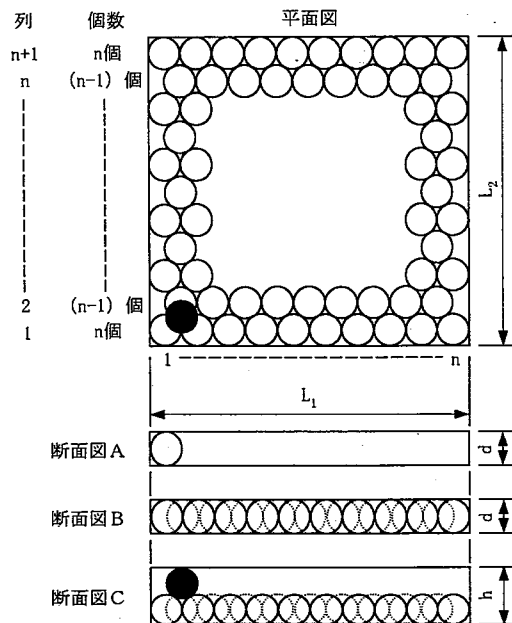


図-2 菱面体充填

ションを行った。一列目の一辺に n 個の粒子を並べた場合、二列目の粒子数は $n-1$ 個となる。このように、奇数列の粒子数は n 個、偶数列の粒子数は $n-1$ 個となる。また、このとき一列目と同じ粒子数を持つ列を最終列にするため、最終列は $n+1$ 列とした。このときの容器の大きさや粒子配列を図-2の平面図に示す。したがって、菱面体充填において、容器の一辺はそれぞれ $L_1 = n d$ 、 $L_2 = \{(\sqrt{3}/2)n + 1\} d$ となることから正方形平面にならないことがわかる。

図-2の断面図 A は、容器に粒子が 1 個充填された場合を示す。このときの容器体積と形状係数と間隙率は、以下ようになる。

$$\text{容器体積: } V = n d \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) d \cdot d = n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) d^3$$

$$\text{形状係数: } R = \frac{2}{n d} + \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) d} + \frac{2}{d} = \frac{2}{d} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} n^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) n + 1}{n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right)}$$

$$\text{間隙率: } p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{\pi}{6n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right)}$$

容器の体積は、一層目が完全に充填されるまで変化しないので形状係数は不変であり、間隙率のみが粒子の増加に伴って減少していくと考えられる。

図-2の断面図 B は、一層目が完全に充填された場合を示す。そのときの粒子個数は、 $n(n+1/2)$ 個である。このときの間隙率について計算すると、以下ようになる。

$$\text{間隙率: } p = 1 - \frac{n(n+1/2)\pi}{6n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right)}$$

図-2の断面図 C は、一層目が完全に充填された後、二層目に 1 個だけ粒子が入った場合を示す。そのときの粒子数は、 $n(n+1/2)+1$ 個である。菱面体充填では、二層目の粒子は最も安定する三つの粒子の間に乗るため、容器高さは $h = \{\sqrt{3}/2 + 1\} d$ となる。このときの容器体積と形状係数と間隙率は、以下ようになる。

$$\text{容器体積: } V = n d \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) d \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) d = n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) d^3$$

$$\text{形状係数: } R = \frac{2}{n d} + \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) d} + \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) d} = \frac{2}{d} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} n^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) n + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}$$

$$\text{間隙率: } p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{[n(n+1/2)+1]\pi}{6n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}$$

二層目が完全に充填された場合について考える。図-2に示すように、二層目の粒子は一層目の粒子の間に充填されるため、充填できる粒子数は $n(n-1/2)$ 個である。よって、二層目まで完全に充填された場合の粒子数は $2n^2$ になる。このときの形状係数は変わらないので、間隙率を計算すると以下ようになる。

$$\text{間隙率: } p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{2n^2\pi}{6n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}$$

以上のことより、形状係数と間隙率についてまとめると、以下に示すような一般式が得られる。

形状係数:

$$R = \frac{2}{n d} + \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) d} + \frac{2}{\left[(m-1)\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right] d} = \frac{2}{d} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} n^2 + \left[\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (m-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] n + \left[1 + (m-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}{n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}$$

$$\text{間隙率} : p = 1 - \frac{v_s}{v} = 1 - \frac{\pi}{6} \cdot \frac{N}{n(\sqrt{3/2}n + 1)(1 - \sqrt{2/3} + m\sqrt{2/3})}$$

ここに、Nは全粒子数、mは層数を表している。

4. 増分間隙率と相対形状係数の提案⁵⁾

充填シミュレーションの結果より、間隙率 n ~ 形状係数 R の関係は、同一の R において n が大きな減少を示すこと、 R の減少に伴い n が急激に増加すること、その際の減少幅が小さくなること、がわかった (図-3)。そこで、最も大きくなる側を最疎間隙率、最も小さな側を最密間隙率と定義した。また、この図上において、最疎間隙率ならびに最密間隙率は一次式によって表現できることがわかっている。この最密間隙率の回帰式から得られた間隙率 n_{\min} と現在の値 n との差を増分間隙率 Δn と定義した。

増分間隙率 : $\Delta n = n - n_{\min}$ (図-3 参照)

また、一層目を最も密に詰めたときの形状係数を R_1 、供試体高さ h を無限大にしたときの形状係数を R_∞ とすれば、次式で定義した相対形状係数 r によって、現在の形状係数 R の相対的位置関係を表現することができる。立方体充填には、次式となる。

相対形状係数 : $r = \{(2L + 4d) - (dLR)\} / 2L$ (立方体充填の場合)

菱面体充填については、容器底の形状はわずかに長方形 ($L_1(\text{cm}) \times L_2(\text{cm})$) となるので、次式となる。

相対形状係数 : $r = (2L_1L_2 + 2dL_1 + 2dL_2 - RdL_1L_2) / 2L_1L_2$ (菱面体充填の場合)

5. シミュレーション結果と壁効果の分類

一辺が 5cm の容器を想定して、直径 2,3,4,5mm の粒子を 1 万個まで充填したシミュレーション結果を以下に示す。図-4 から図-7 に立方体充填の結果を示し、図-8 から図-11 に菱面体充填の結果を示す。

5-1. 立方体充填

図-4 より、間隙率は大きな規則正しい増減を繰り返しながら減少する傾向が見られる。また、粒子径が小さいほど、間隙率の変化幅も小さくなり、密に詰まっていることが読み取れる。図-5 より、詰める粒子の増加に伴い形状係数は減少するが、それに伴い間隙率は規則的な増減を繰り返しながらある一定値に収束する傾向が見られる。また、間隙率変化の幅は、粒子径が小さいほど小さくなっている。最密間隙率を見ると、どの粒子径においても、間隙率は理論間隙率 $n_0 \approx 47.64\%$ と同じ値を示している。これにより、立方体充填では、層の増加に伴う壁効果は示さず、最疎間隙率側のみ壁効果が現れるこ

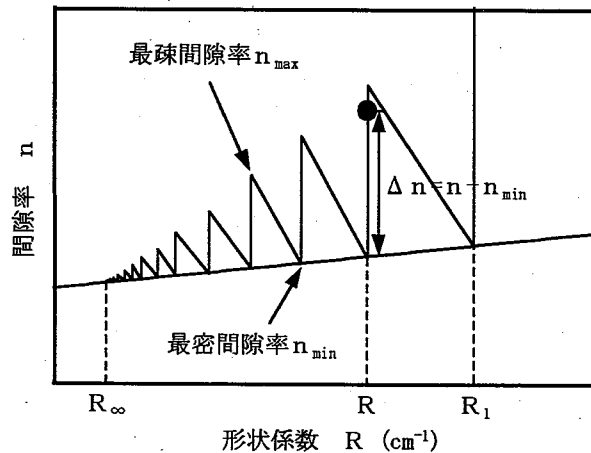


図-3 相対形状係数説明図

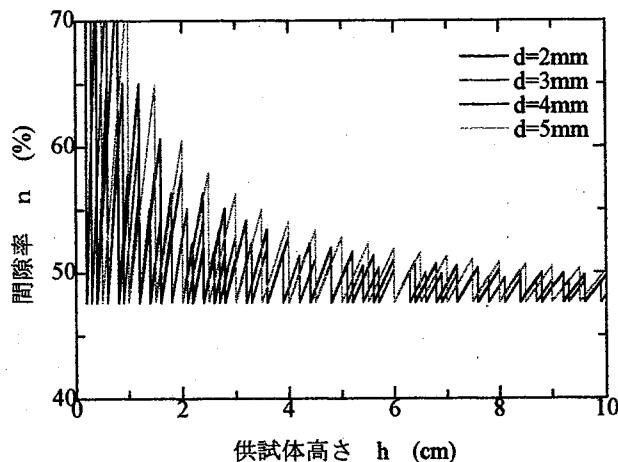


図-4 間隙率~供試体高さ

とがわかった。図-6より、どの粒子径の結果であつても、間隙率の変化傾向は一致している。間隙率の変化幅、層ごとの変化幅も一致していることから、この係数の意味合いが感じられ、非常に興味深い結果となった。以上より、図-7に、立方体充填における壁効果を分類した。立方体充填の粒子配列は、容器表面に影響されことなく規則正しく充填されるため、最密間隙率は一定値を保つことになる。また、最密間隙率と理論間隙率が同じ値を示しており、壁による影響を受けないと考えられる。最疎間隙率を見ると、粒子径により勾配が変化することから、壁による影響があると考えられる。以上より、立方体充填における壁効果は一つと考えられる(壁効果1)。

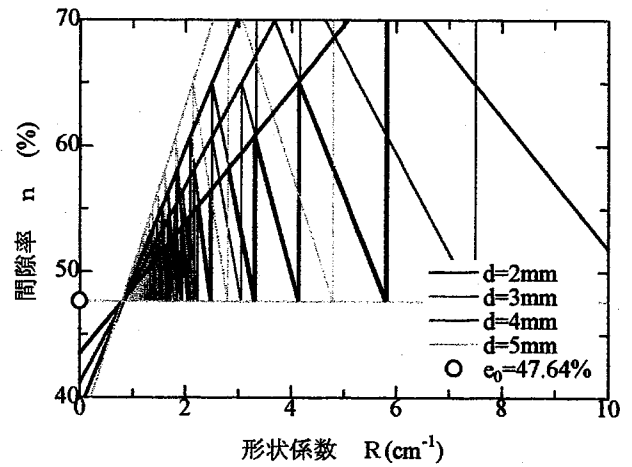


図-5 間隙率～形状係数

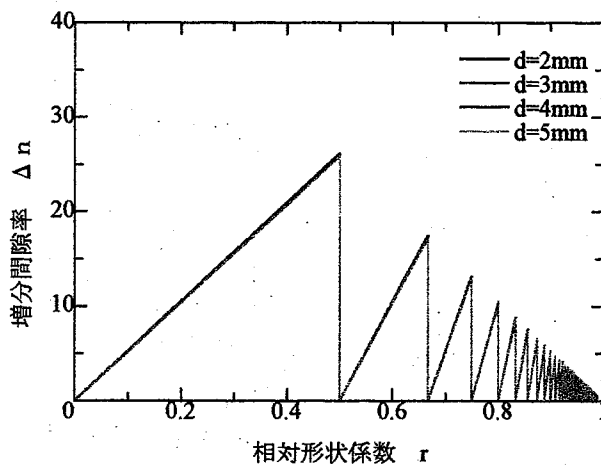


図-6 増分間隙率～相対形状係数

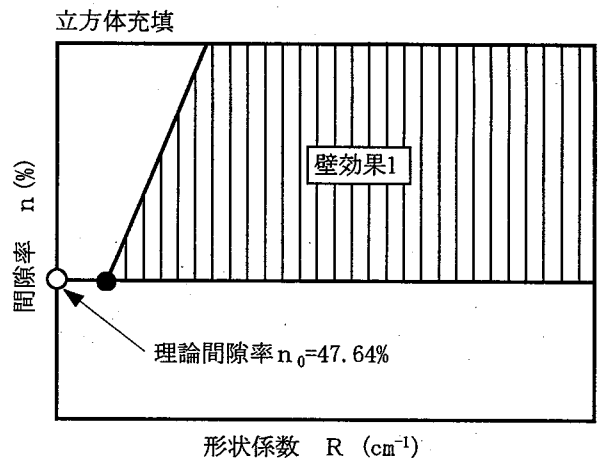


図-7 立方体充填壁効果図

5-2. 菱面体充填

図-8より、菱面体充填においても、間隙率の変化傾向は、規則的な増減を繰り返しながらある一定値に収束する傾向がある。しかし、粒子径が小さいと、間隙率変化の収束する値も小さくなっている。これにより、粒子径が小さくなるほど密に詰まりやすいことが明らかに見られる。図-9より、菱面体充填においても、間隙率の変化傾向は、規則的な増減を繰り返しながらある一定値に収束する傾向がある。しかし、最密間隙率を見ると、立方体充填とは異なり、粒子径により減少する傾向が見られる。この式に勾配が出てくることは容器高さが大きくなると

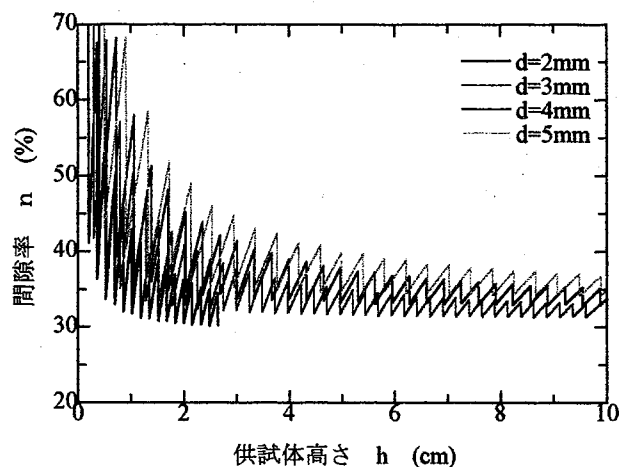


図-8 間隙率～供試体高さ

間隙率が減少することに対応しており、間隙率に対する壁効果の一つを表わしている。また、形状係数 $R=0$ のときの間隙率は、粒子径が小さいものほど小さな値を示している。理論間隙率 $n_0=25.95\%$ を考えると、容器に対して直径の小さい粒子を充填した場合は、壁による影響が小さくなるものと考えられる。この容器の大きさと粒子径大きさの関係も壁効果の一つと考えられる。図-10より、間隙率の変化傾向はほぼ一致している。層ごとの変化幅は一致しているが、間隙率の変化幅はわずかにずれている。これは、菱面体の充填構造により、容器と粒子の間に隙間ができたためと思われる。以上より、図-11に、菱面体充填における壁効果を分類した。

こちらにも、立方体充填と同様に、最疎間隙率に変化が見られることから、壁効果1が生じていると考えられる。そして、粒子径により、収束する間隙率の値も小さくなっていることから、ここにも壁効果が生じていると考えることができる(壁効果2)。また、理論間隙率を見ると、シミュレーションの値よりも小さい。これは、粒子配列が容器表面の影響を受けているためと考えられる。この影響も壁効果の一つである(壁効果3)。以上より、菱面体充填における壁効果は三つと考えられる。

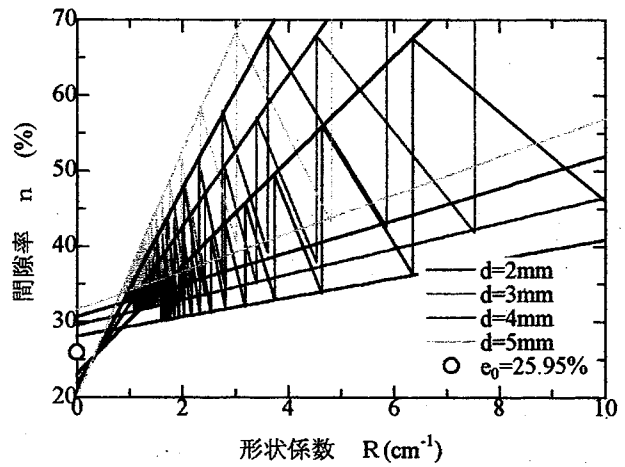


図-9 間隙率～形状係数

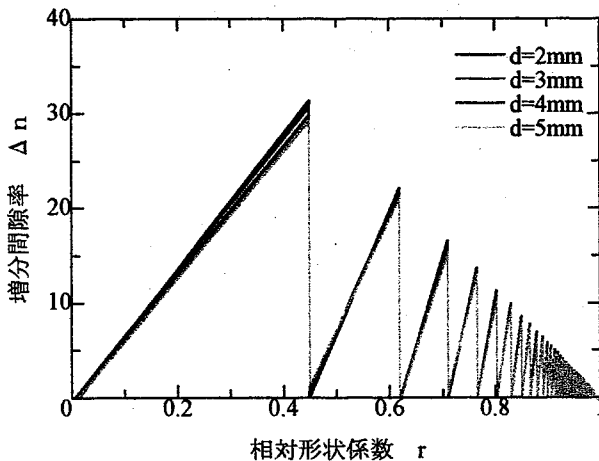


図-10 増分間隙率～相対形状係数

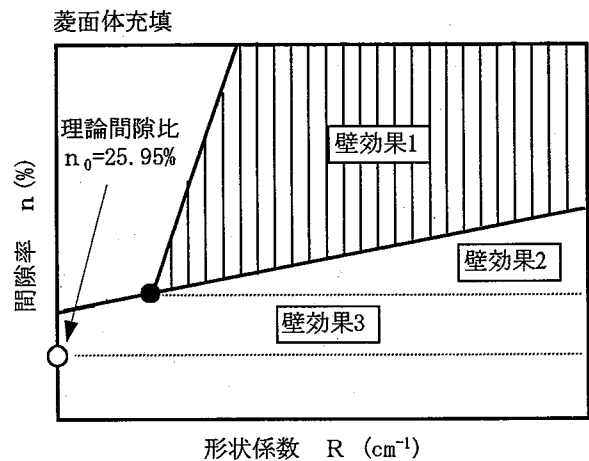


図-11 菱面体充填壁効果図

6. 充填実験の方法と結果

6-1. 実験方法

一辺 $L=5.0\text{cm}$ 、深さ $h=8.0\text{cm}$ の四角柱容器と、直径 $d=2,3,4,5\text{mm}$ の四種類のステンレス球を用いて、均一粒度のランダム充填実験を行った。最初に一層目に最も密に入る粒子数とその重量ならびに高さを測定した。一層目以降の充填については、粒子を規則正しく増加させた。最も密な状態にするために粒子を一度に詰め、容器を軽く揺すり供試体表面を水平にさせた後、容器に落とし蓋をせずに試験機(フロー試験機)にセットし、衝撃を50回与えた。その後、落とし蓋を載せ150回の衝撃を与えた。衝撃を与える速さは、1回/秒とした。衝撃を与え終わった供試体の高さや重量を計測し、間隙率等を算出した。

6-2. 実験結果

図-12 から図-14 に、ランダム充填実験を行った結果を示す。図-12 より、間隙率は供試体高さが 2cm の辺りまでは大きな増減を繰り返しながら減少していく傾向が認められる。しかし、供試体高さが 2cm を越えた辺りから、間隙率の大きな増減は認められず、微小な増減となり、一定値にほぼ直線的に収束していく傾向が認められるようになる。さらに、詰める粒子径が小さいほど、収束する間隙率の値も小さくなっていく。これらのことから、粒子径が小さいほど、密に詰まりやすいことがわかる。これは、菱面体充填のシミュレーションの傾向を示していることになる。しかし、2mm の粒子を充填した場合であっても、菱面体充填の理論間隙率 n_0 よりもはるかに高い値を示していることに注意が必要である。図-13 より、前述したように、形状係数は容器の小ささを表わすため、供試体高さが高くなるにつれて、形状係数は小さくなる。つまり、図上においては、実験データは右から左へとプロットされることになる。そして、最密間隙率を見ると、同一な値を示していないため、こちらも菱面体充填のシミュレーションの傾向を示している。しかし、シミュレーションでは粒子径が小さいほど、勾配が小さく現れていたが、実験においては勾配に乱れが生じている。これは、一層目の充填において、菱面体の充填構造特性により、完全に密な状態にならなかったためと思われる。つまり、容器と粒子との間に、隙間ができていたと考えられる。また、収束した間隙率を見ると、立方体充填の理論間隙率 n_0 よりも小さな値を示し、菱面体充填の理論間隙率 n_0 と比べてもはるかに高い値を示している。これにより、密に詰まろうとしているが、容器壁等の影響により詰まりにくくなっていると考えられる。図-14 より、間隙率の変化傾向はほぼ同様な関係を示している。しかし、層ごとにおける変化幅は非常に類似しているが、相対形状係数 $r=0$ のときの始点が異なっている。これは形状係数の図で整理したときにも現れた現象であるが、容器壁等により、一層目の充填構造が乱されているために現れた

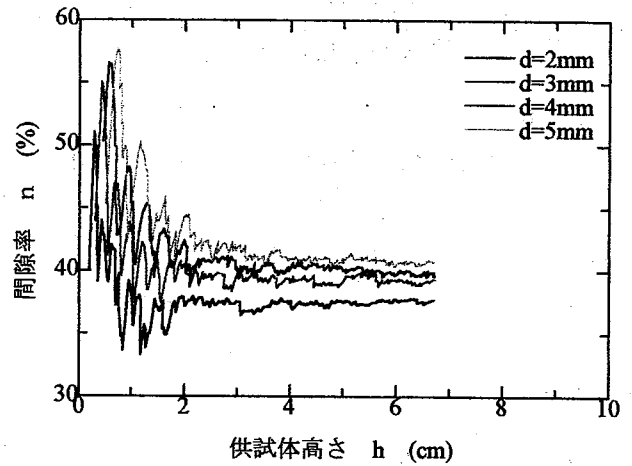


図-12 間隙率～供試体高さ

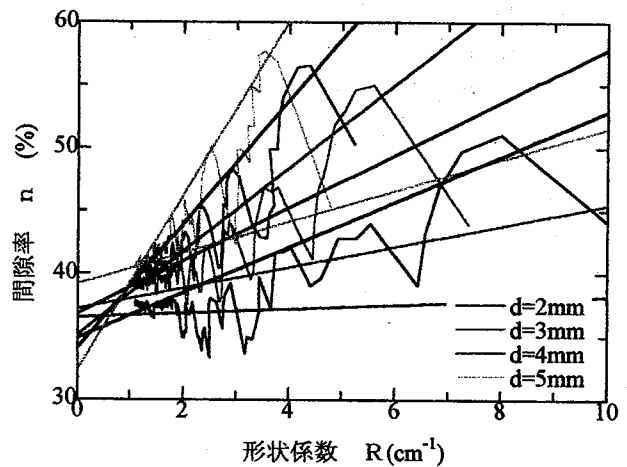


図-13 間隙率～形状係数

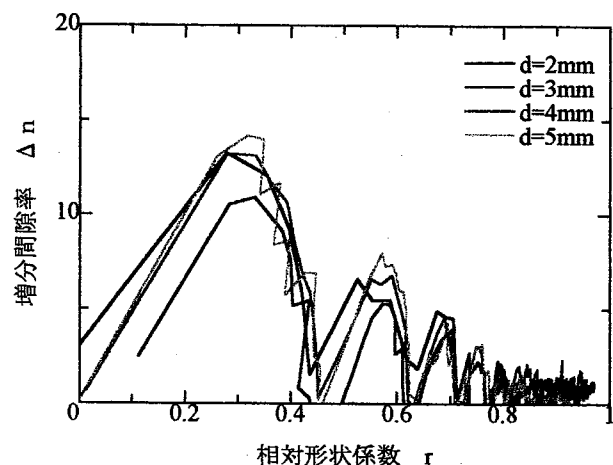


図-14 増分間隙率～相対形状係数

ものであると思われる。多少異なる部分も認められるが、間隙率の変化傾向が非常に類似していることにより、この係数の意味合いが感じられる。

7. まとめ

- ①間隙率～形状係数の関係図から、立方体充填ならびに菱面体充填の場合の壁効果について、整理と種類分けをすることができた。
- ②以前までは、間隙比による整理を行ってきた。しかし、今回行った間隙率による整理を用いた場合、より有効な結果を得ることができた。今後は、異なる粒状体を用いた実験結果での整理を行いたい。

参考文献

- 1)板橋一雄・植下協：乱さない洪積熱田砂の力学的特性,土質工学論文報告集,Vol.20,No.3,pp.101 - 109,1980.
- 2)立石哲郎・板橋一雄・石川靖晃・蟹江伸次郎：積層体の密度に関する容器形状の影響と補正式の提案,土木学会中部支部平成6年度研究発表会,pp.367 - 368,1994.
- 3)牧岳志・大脇忠雄・宮地純朗・板橋一雄：均一球の充填に対する壁効果の影響に関するシミュレーション,平成9年度土木学会中部支部研究発表会,pp.515 - 516,1998.
- 4)牧岳志・板橋一雄・和田英孝：均一粒状体の間隙比に対する壁効果の影響～その定式化と数値シミュレーション～,第10回地盤工学シンポジウム論文集,地盤工学会中部支部,pp.1 - 6,1998.
- 5)木村哲晃・板橋一雄・姫野圭：均一ステンレス球の充填実験結果の整理方法の提案,第35回地盤工学研究発表会,pp.995 - 996,2000.