

繰返し载荷挙動を説明するための粘土の移動硬化モデルとその適用性

名古屋工業大学 正会員 E.Q.Chowdhury
 名古屋工業大学 正会員 中井 照夫
 名古屋工業大学大学院 学生会員 山田 正太郎

K_0 圧密地盤の初期異方性を簡単に表現する方法として、関口・太田によって、初期降伏曲面の軸を回転させる方法が提案されている¹⁾。これを拡張させるかたちで、中井らはせん断過程においても連続的に降伏曲面を回転させることによって、応力誘導異方性を表現した²⁾。

本文では、この応力誘導異方性を考慮した kinematic t_{ij} -clay model について簡単に紹介するとともに、新たな降伏曲面の中心軸の移動硬化則を提案する。さらには、橋口による下負荷面の概念³⁾を導入することによって、繰返し载荷をも表現可能なモデルに拡張する。また、三主応力試験結果と比較することにより、提案するモデルの妥当性を検証した。

1. 修正応力 t_{ij} ⁴⁾ とその不変量

はじめに修正応力 t_{ij} について簡単に触れることにする。修正応力 t_{ij} は通常の応力 σ_{ij} と応力比 a_{ij} の関数であり、 t_{ij} は次式のように与えられる。

$$t_{ij} = a_{ik} \sigma_{kj} \quad (1)$$

a_{ij} はその主値 ($a_i = \sqrt{I_3 / (I_2 \sigma_i)}$, $(i=1,2,3)$: I_2, I_3 は σ_{ij} の 2 次, 3 次の不変量) が空間活動面 (SMP: Spatially Mobilized Plane)⁵⁾ の方向余弦で与えられる対称テンソルである。その結果 a_{ij} , t_{ij} , σ_{ij} の主軸は一致する。

また、修正応力 t_{ij} の a_{ij} 方向の成分を t_N , a_{ij} 方向からみた偏差成分を t_{ij}' , そのノルムを t_S , 応力比を x_{ij} , そのノルムを X とすれば、それぞれ次式で与えられる。

$$t_N = t_{ij} a_{ij} \quad (2), \quad t_{ij}' = t_{ij} - t_N a_{ij} \quad (3), \quad t_S = \sqrt{t_{ij}' t_{ij}'} \quad (4), \quad x_{ij} = t_{ij}' / t_N \quad (5), \quad X = \sqrt{x_{ij}' x_{ij}'} \quad (6)$$

2. kinematic t_{ij} -clay model および新しいモデルの特徴

図-1,2 は kinematic t_{ij} -clay model の降伏曲面 (塑性ポテンシャル面) を表している。また、 x_{ij} 空間において降伏曲面の中心軸を n_{ij} で表す。

さて、中井らは応力状態が A 点にあるとき、図-1 の実線で示される降伏曲面の外側に応力が移動しようとした場合に、降伏すると仮定している。そこで中井らは、次式によって降伏曲面が与えられると仮定している。

$$f = \ln t_N + \zeta(Z) - \ln t_{N1} = 0 \quad (7)$$

$$Z = X^* + n \quad (8), \quad x_{ij}^* = x_{ij} - n_{ij} \quad (9), \quad X^* = \sqrt{x_{ij}^* x_{ij}^*} \quad (10), \quad n = \sqrt{n_{ij} n_{ij}} \quad (11)$$

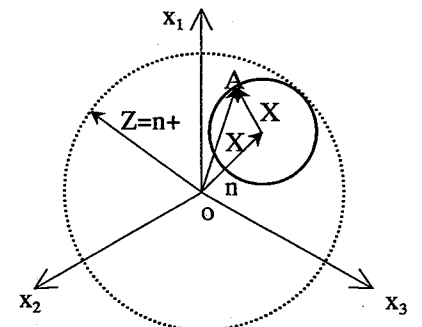


図-1 応力比 x_{ij} 空間で示した移動硬化型モデルの降伏曲面

上に示した降伏曲面を用いる利点は、応力誘導異方性を表現する一方で、単調载荷においては $Z = X$ となり、応力～ひずみ関係が従来の等方硬化型のモデルと一致する点である。しかし、このモデルでは、たとえば‘等振幅の繰返し载荷において、繰返し回数の増加にともない剛性が大きくなる傾向を説明できない’、‘繰返した場合、過度の体積変化を生ずる’といった問題を生ずる。

Kinematic hardening model for clay to simulate cyclic behavior

E.Q.Chowdhury, T.Nakai and S.Yamada (Nagoya Institute of Technology)

一方、新たに提案するモデルでは、降伏曲面は一般的に次式で与える。

$$f = \ln t_N + \zeta(X^*) - \ln t_N^* = 0 \quad (12)$$

この降伏面は、従来のモデル同様、原点を中心に回転した形状となる。ZにかえてX*を用いることに付随して、体積ひずみは t_N^* と関連づけて考えられる。図-2よりわかるように、

同じ応力状態にあっても、 n が0でなければ、 t_N^* は t_{N1} より小さな値をとる。従来の kinematic t_{ij} -clay model において体積ひずみが t_{N1} と関連づけられていたことを考えると、新たに提案するモデルでは体積ひずみが小さく表現されることがわかる。しかし、一方でこのことは、Roscoe らが仮定している‘状態曲面’の概念⁹⁾を厳密には満足しないことになる。

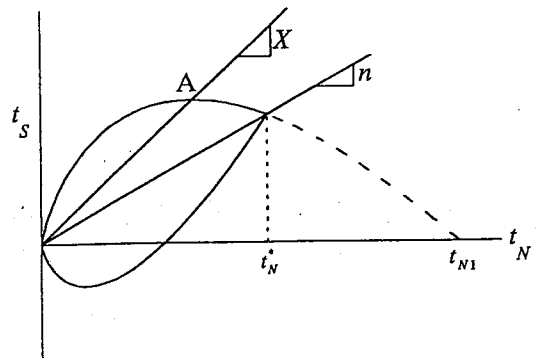


図-2 $t_N - t_S$ 平面で示した移動硬化型モデルの降伏曲面

また、従来の kinematic t_{ij} -clay model では、降伏曲面の内側は純粋な弾性域である。そこで提案するモデルでは下負荷面の概念を導入し、繰返し载荷による体積圧縮によって徐々に硬くなる粘土の傾向を表現可能としている。

3. 新しいモデルの概要

まず、全ひずみ増分を弾性成分と塑性成分とに分ける。

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (13)$$

弾性成分には次に示す Hook 則を採用する。

$$d\varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} \quad (14)$$

$$E_{ijkl} = \frac{E_e}{1+\nu_e} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu_e E_e}{(1+\nu_e)(1-2\nu_e)} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (15)$$

ここに、 ν_e はポアソン比、 E_e はヤング率である。また、 E_e は膨潤指数 κ および初期の間隙比 e_0 を用いて次のように表される。

$$E_e = 3p(1+e_0)(1-2\nu_e)/\kappa \quad (16)$$

塑性成分に関しては、以下のように決める。

正規降伏面は常に修正応力空間の原点を通り、せん断にともないその大きさを変えると同時に、その点を中心に回転する。一方で、図-3 に示すような正規降伏面および、常に現在の応力点を通る下負荷面を仮定する。下負荷面は正規降伏面に相似であり、その相似中心は修正応力空間の原点に固定されていると仮定する。そのため、下負荷面も常に修正応力空間の原点を通り、両面の中心軸は一致している。また、下負荷面上の現在の応力点 $t(t_N, t_S)$ と、それに対する正規降伏面上の応力点 $\bar{t}(\bar{t}_N, \bar{t}_S)$ の間には、正規降伏面の大きさに

に対する下負荷面の大きさの比 $G = t_N^*/t_N^*$ ($0 \leq G \leq 1$) を介してそれぞれ次のような関係がある。

$$t_N^* = G\bar{t}_N \quad (17), \quad t_N = G\bar{t}_N \quad (18), \quad t_S = G\bar{t}_S \quad (19), \quad X^* = \bar{X} \quad (20)$$

$\xi(\bar{X}^*) = \bar{X}^*/M^*$ とすれば、正規降伏曲面は具体的に次の関数で与える。

$$f = \ln \bar{t}_N + \frac{\bar{X}^*}{M^*} - \ln \bar{t}_N^* = 0 \quad (21)$$

ここに、 M^* は三軸圧縮試験の限界状態での主応力比 $R_r (= \sigma_o / \sigma_r)$ より決まるパラメータである。 \bar{t}_N^* は、等方圧縮時の ϵ_v^p と $\ln \bar{t}_N^* = \ln p$ との間の直線関係を参考に次式のように定義する。

$$\bar{t}_N^* = \bar{t}_{N0} \exp \frac{\epsilon_v^p}{C_t - C_e} \quad (22)$$

ここに、 \bar{t}_{N0} は正規降伏面の初期の大きさであり、 $C_t = \lambda / (1 + e_0)$ 、

$C_e = \kappa / (1 + e_0)$ である。ただし、 λ は圧縮指数である。

下負荷面は正規降伏面と相似であるので、次式のように表される。

$$f = \ln t_N + \frac{X^*}{M^*} - \ln t_N^* = 0 \quad (23)$$

さらに上式は、式(17)、式(22)を用いて次式のように表すことができる。

$$f = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \frac{X^*}{M^*} - \ln G - \frac{\epsilon_v^p}{C_t - C_e} = 0 \quad (24)$$

また、適合条件より、次式が成り立たねばならない。

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial n_{kl}} dn_{kl} - \frac{dG}{G} - \frac{d\epsilon_v^p}{C_t - C_e} = 0 \quad (25)$$

次に、 t_{ij} 空間において関連流動則を仮定する。

$$d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t_{ij}} \quad (\Lambda > 0) \quad (26)$$

Λ は正值の比例係数である。式(25)より、 Λ を求めるためには n_{ij} および G の発展則を規定せねばならない。

そこで、橋口と陳⁶⁾を参考に塑性ひずみの関数で n_{ij} の発展則を次式のように仮定する。

$$dn_{ij} = k_r d\epsilon_s^p \left(X_r \frac{x_{ij}^*}{X^*} - n_{ij} \right) \quad (27), \quad d\epsilon_s^p = \sqrt{(d\epsilon_{ij}^p - d\epsilon_v^p \delta_{ij}/3)(d\epsilon_{ij}^p - d\epsilon_v^p \delta_{ij}/3)} \quad (28)$$

ここに、 k_r は回転速度に関するパラメータである。 X_r は図-4 に示す降伏曲面の中心軸の回転限界面であり、中心軸はこの面を越えない範囲で移動する。また、式(27)の括弧でくくられた部分は、中心軸の移動方向を表しており、中心軸は下負荷面上の現在の応力点に対する、回転限界面上の共役点、すなわち図-4 の a 点の方向へ向かって移動する。

さらに、塑性負荷過程において、下負荷面が正規降伏面に確実に漸近するには、 dG は G の値に応じて表-1 のような条件を満足することが必要である。そこで、相似比 G の発展則を次のように仮定する。

表-1 相似比 G 発展則にかせられる条件

$dG = +\infty$	if	$G = 0$	} ($d\epsilon_{ij}^p \neq 0$)
$dG > 0$	if	$1 > G > 0$	
$dG = 0$	if	$G = 1$	
$dG < 0$	if	$G > 1$	

b: Current stress

$\vec{oo}': n_{ij}$

$\vec{ob}: x_{ij}$

$\vec{o'b}: x_{ij}^* = x_{ij} - n_{ij}$

$\vec{oa}: X_r \frac{x_{ij}^*}{X^*} (\vec{oa} // \vec{o'b})$

$\vec{o'a}: X_r \frac{x_{ij}^*}{X^*} - n_{ij}$

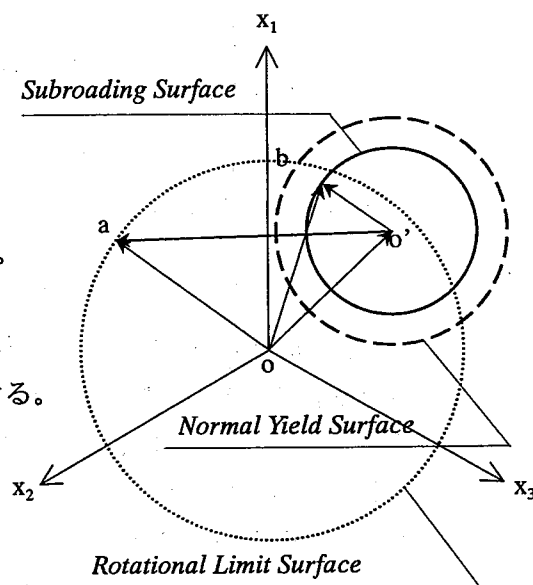


図-4 応力比 x_{ij} 空間で示した回転限界面および降伏面

$$dG = -a \ln G \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (29)$$

ここに、 a は正値をとるパラメータである。

式(26), (27), (29)を式(25)に代入することによって、正値の比例係数 Λ は次のように求められる。

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqrs} \frac{\partial f}{\partial t_{rs}}} \quad , \quad h = \frac{\partial f / \partial t_{kk}}{C_t - C_e} - k_r \frac{\partial f}{\partial n_{ij}} \left(X_r \frac{x_{ij}^*}{X^*} - n_{ij} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial t_{mn}} - \frac{\partial f}{\partial t_{kk}} \frac{\delta_{mn}}{3} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial t_{mn}} - \frac{\partial f}{\partial t_{ll}} \frac{\delta_{mn}}{3} \right)} - \frac{a \ln G}{G} \sqrt{\frac{\partial f}{\partial t_{kl}} \frac{\partial f}{\partial t_{kl}}} \quad (30)$$

最終的に、負荷状態での応力増分は次のように表される。

$$d\sigma_{ij} = \left(E_{ijkl} - \frac{E_{ijrs} \frac{\partial f}{\partial t_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} E_{abcd} \frac{\partial f}{\partial t_{cd}}} \right) d\varepsilon_{kl} \quad (32)$$

なお、次の負荷基準 η を採用する。

$$d\varepsilon_{ij}^p \neq 0 \quad \text{if} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} > 0 \quad (33)$$

表-2 藤の森粘土のパラメータと初期間隙比

λ	7.78×10^{-2}
κ	8.24×10^{-3}
$M^* (R_f)$	$3.69 \times 10^{-1} (3.49)$
v_e	0.0
X_r	0.30
k_r	0.30
a	0.20
e_0	0.77 (98kPa のとき)

4.三主応力試験結果との比較とその考察

三主応力試験は、藤の森粘土を用いて、それぞれ図-5,7,9,11 で示す応力経路にそって、応力制御でおこなっている^{8),9)}。図-5,7,9,11 は oct 面上で見た応力経路と、それに対応する応力値を示している。

また、解析に用いたパラメータは表-2 に示すとおりである。この値は三軸試験結果の解析に用いたパラメータと同じ値を用いており、ここで示す試験結果にあわせるために新たに決めたものではない。

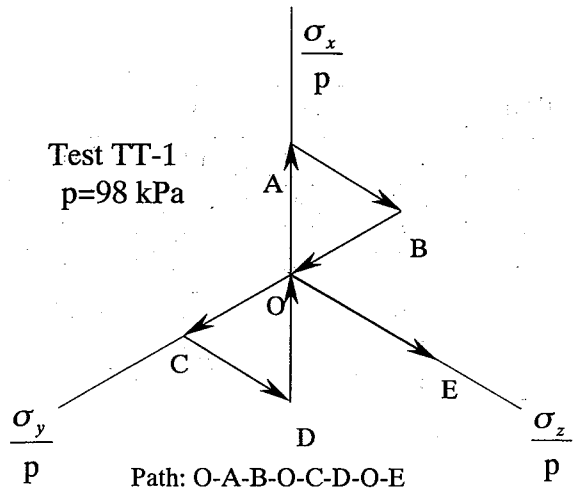
さて、試験結果と解析結果を、 q/p とそれに対する主ひずみで整理したものを、図-6,8,10,12 に示す。なを、 p, q は主応力を用いて次式のように表される。

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \quad (34), \quad q = \sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) / 2} \quad (35)$$

図-6,8,10,12 より、解析結果は試験結果の傾向を捉えているとともに、ひずみの大きさでも大きなずれはなく、本モデルによる予測は妥当であると言えよう。

FEM を用いて解析する場合、定量的な評価まで期待するのであれば、要素単位での複雑な繰り返し挙動の予測は重要であろう。

- <参考文献> 1) Sekiguchi, H., and Ohta, H., "Induced anisotropy and time dependency in clays," *Proc. 9th ICSMFE, Tokyo, 1977*, pp. 229-238 2) T. Nakai and Y. Mihara, "A new mechanical quantity for soil constitutive models," *S&F, Vol. 24, 1984, No. 2*, pp. 82-94. 3) Hashiguchi, K., "Constitutive equations of ... with elastic-plastic transition," *J. Appl. Mech. ASME, Vol. 47, 1980*, pp. 266-272. 4) Nakai, T., Fujii, J., and Taki, H., "Kinematic extension of model for sand," *Proc. NUMOG III, Canada, 1989*, pp. 36-45. 5) Roscoe, K. H., and Schofield A. N., and Yhurairajah, A., "Yielding of clays in states wetter critical," *Geotechnique, 1963, Vol. 13, No. 3*, pp. 211-240. 6) Hashiguchi, K., and Chen, Z. P., "Elastoplastic constitutive equation of soils with the subloading surface and the rotational hardening," *Int. J. Num. Ana. Met. Geomechanics, 1998*. (in press) 7) Hashiguchi, K., "Subloading surface model in unconventional plasticity," *Int. J. Soils structures, 25*, 917-945. 8) 中井照夫, 渡辺浩二, 山田薫夫 (1993), "種々のせん断・圧密履歴を受けた粘土の 3 次元応力・変形特性", 第 28 回土質工学研究発表会, pp. 735-736 9) 中井照夫, 星川拓也, 土屋朋之, 鶴飼薫 (1991), "任意応力経路下の 3 主応力制御試験とその解析", 土木学会第 46 回年次学術講演会, pp. 352-353. 10) Chowdhury, E. Q., "Elastoplastic Models for clays modified stresses," Nagoya Institute of Technology, Dr. thesis, 1998.



Point	σ_x	σ_y	σ_z	p
O	1.0	1.0	1.0	1.0
A	1.8	0.6	0.6	1.0
B	1.29	0.43	1.29	1.0
C	0.6	1.8	0.6	1.0
D	0.43	1.29	1.29	1.0
E	0.3	0.3	2.4	1.0

* σ_x 98 kPa

図-5: OCT 面上での test TT-1 の応力経路と対応する応力値

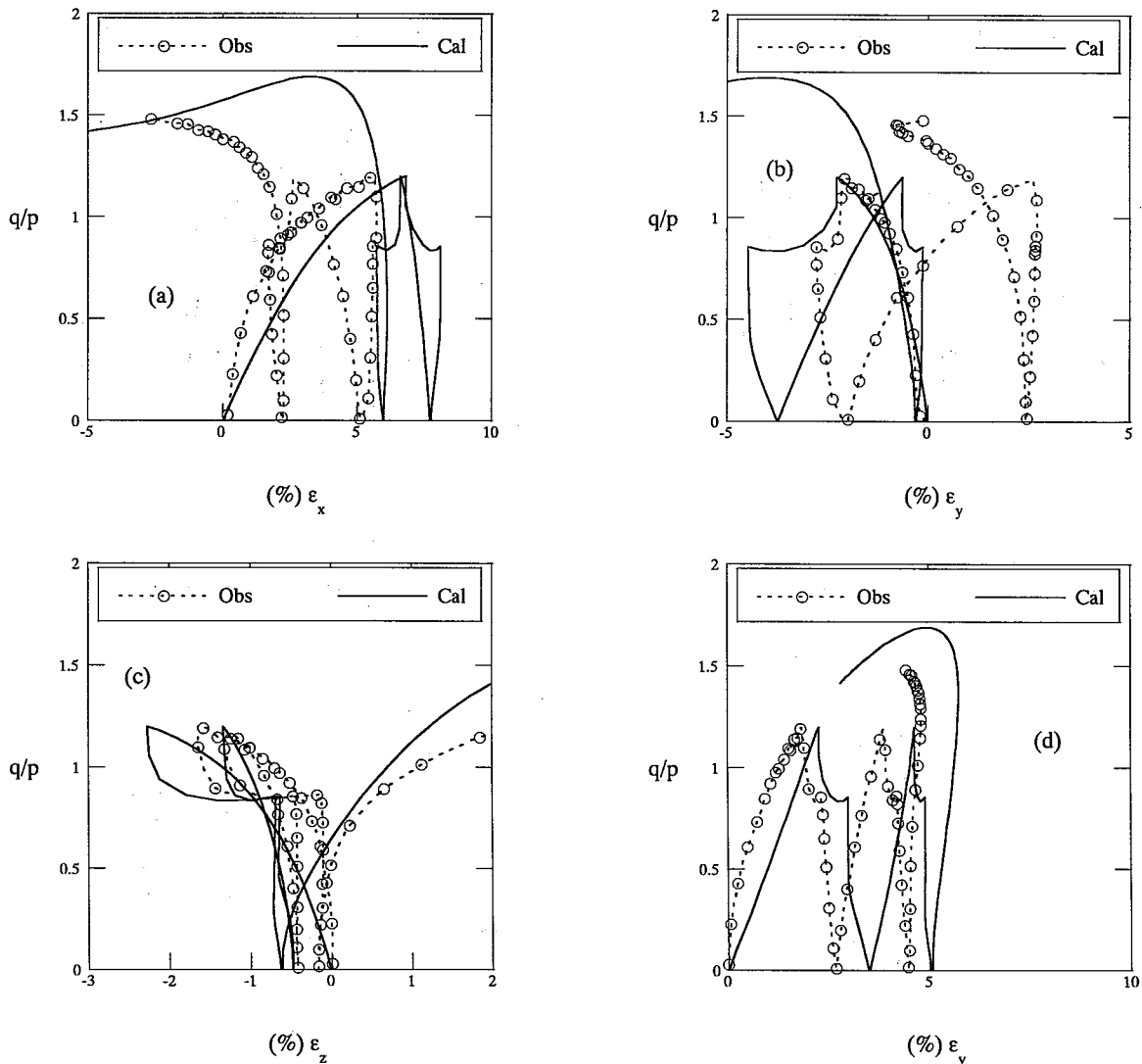
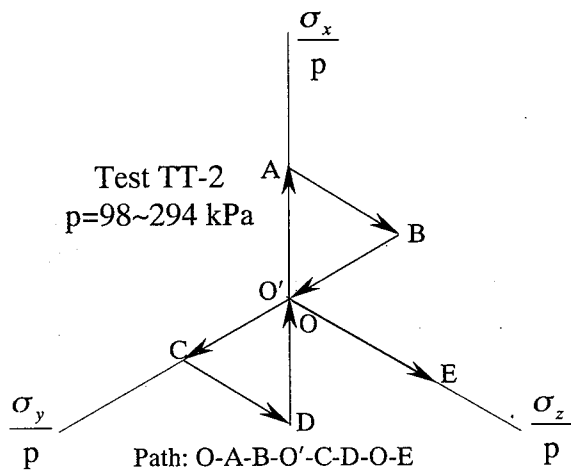


図-6: test TT-1 の実測値および解析結果



Point	σ_x	σ_y	σ_z	p
O	1.0	1.0	1.0	1.0
A	3.0	1.0	1.0	1.67
B	3.0	1.0	3.0	2.33
O'	3.0	3.0	3.0	3.0
C	1.0	3.0	1.0	1.67
D	1.0	3.0	3.0	2.33
E	1.0	1.0	6.0	2.67

* σ_x 98 kPa

図-7: Fig 4: OCT 面上での test TT-2 の応力経路と対応する応力値

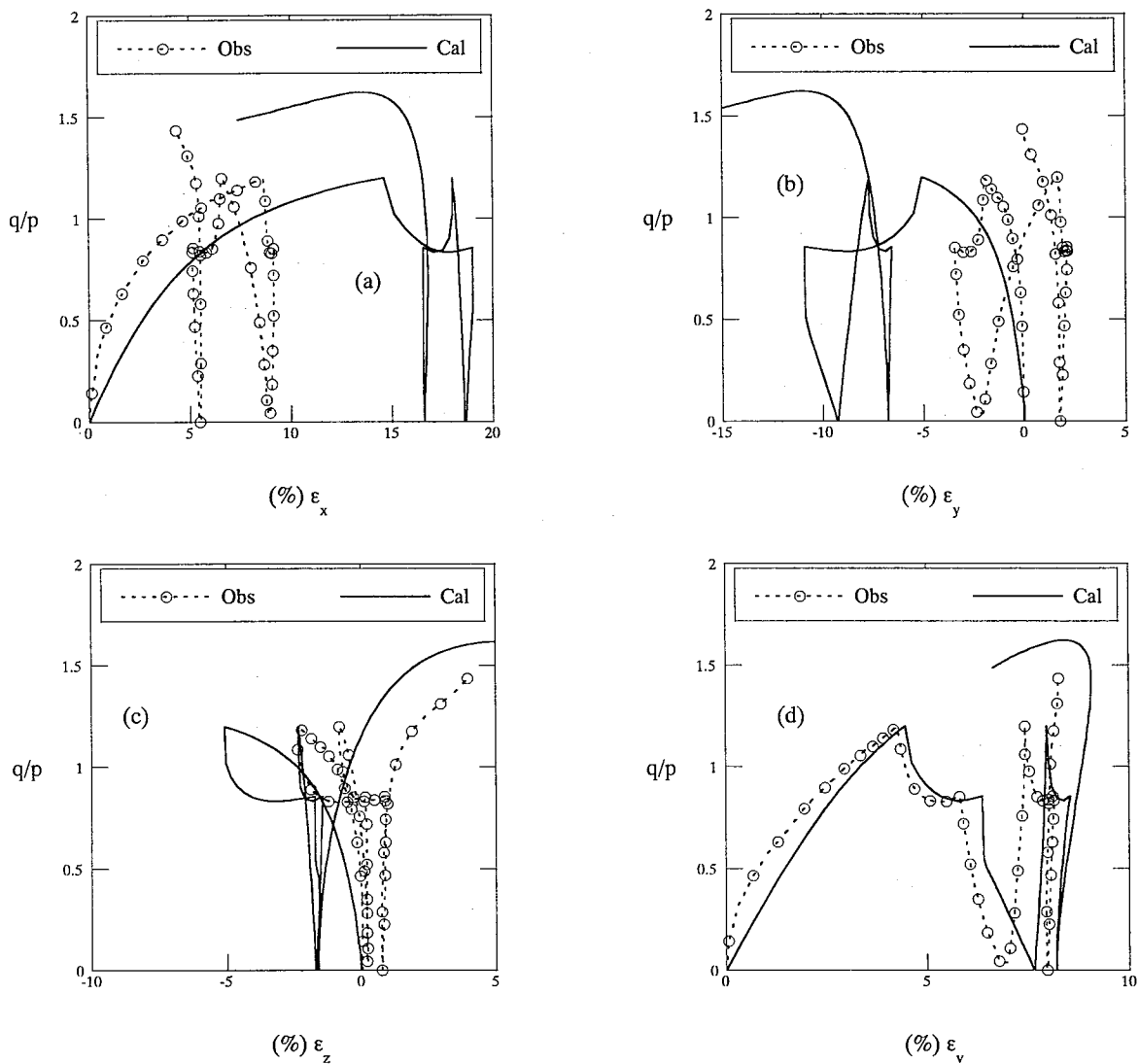
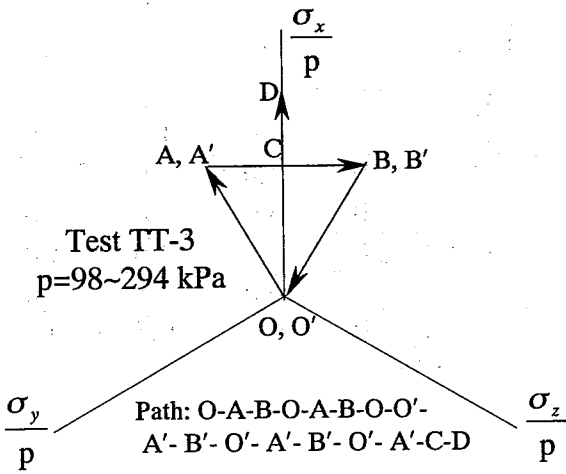


図-8: test TT-2 の実測値および解析結果



Point	σ_x	σ_y	σ_z	p
O	1.0	1.0	1.0	1.0
A	1.5	1.0	0.5	1.0
B	1.5	0.5	1.0	1.0
O'	3.0	3.0	3.0	3.0
A'	4.5	3.0	1.5	3.0
B'	4.5	1.5	3.0	3.0
C	4.5	2.25	2.25	3.0
D	7.0	1.0	1.0	3.0

* σ_x 98 kPa

図-9: OCT 面上での test TT-3 の応力経路と対応する応力値

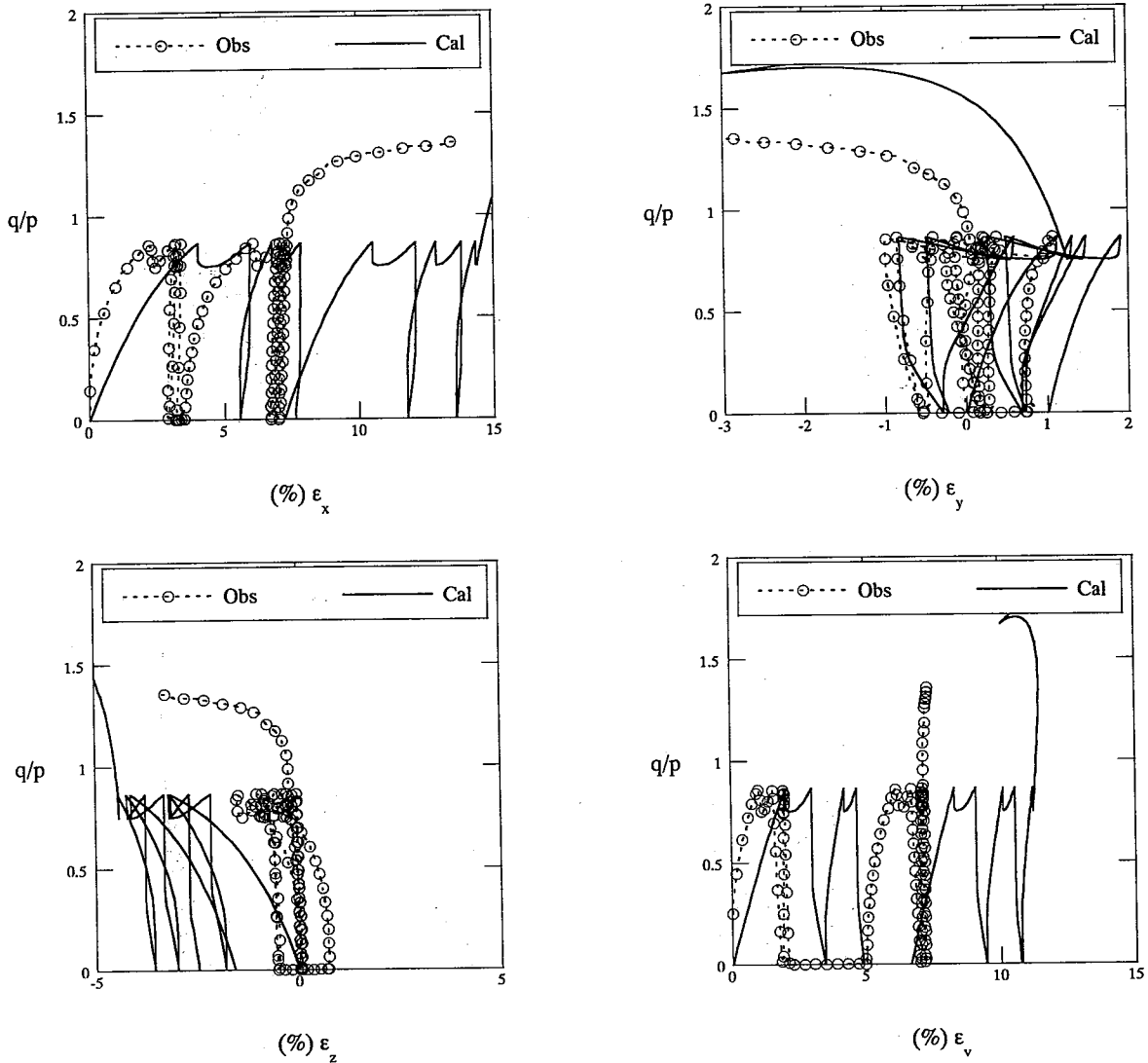
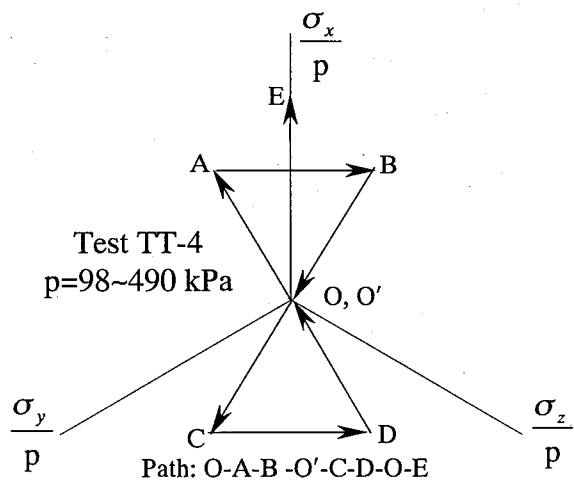


図-10: test TT-3 の実測値および解析結果



Point	σ_x	σ_y	σ_z	p
O	2.0	2.0	2.0	2.0
A	4.5	3.0	1.5	3.0
B	6.0	2.0	4.0	4.0
O'	5.0	5.0	5.0	5.0
C	2.0	6.0	4.0	4.0
D	1.5	3.0	4.5	3.0
E	5.0	0.5	0.5	0.5

* σ_x 98 kPa

図-11: OCT面上での test TT-4 の応力経路と対応する応力値

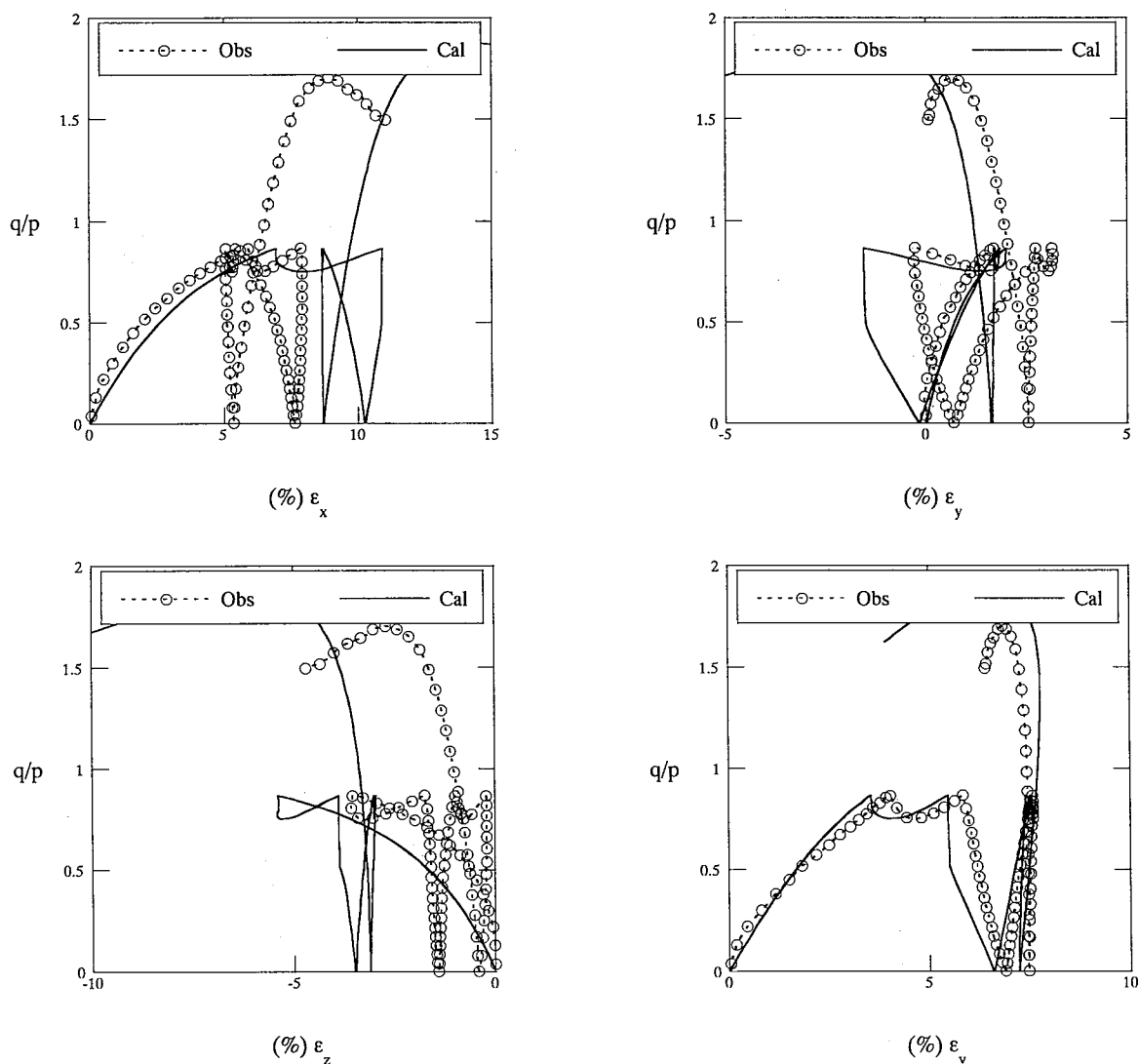


図-12: test TT-4 の実測値および解析結果