均一粒状体の間隙比に対する壁効果の影響
～その定式化と数値シミュレーション～

名城大学　　大 学 院　　　学生員　牧　岳志
名城大学　　理工学部　　　正会員　板橋一雄
基礎地盤コンサルタンツ㈱　正会員　和田英孝

1．はじめに

密度や間隙比は，土の工学的性質と密接な関係があり，特にせん断強度をはじめとするいろいろな力学的特性を支配する重要な要素である．筆者の一人は，乱さない洪積熱田砂の供試体の密度が，その大きさの影響を受けることに気がつき，その供試体密度の誤差原因の一つとして，表面付近の乱れを考え，密度の差異が供試体の表面積と体積の比率で評価されることを提案している[1]．さらに，モデル実験によく用いられている積層体の密度が，詰める容器の大きさによって異なり，それが容器の表面積と体積の比率に関係することも示している[2]．そこで，本研究室ではこのような粒状体の充填に対する容器の壁効果の程度を見ることを目的として，簡単な仮定の下での定式化とシミュレーション[3]を実施するとともに，種々の円筒形ステンレス容器を用いてステンレス球のランダム充填実験[4]を行ってきた．また，その間隙比変化の整理方法には筆者らが提案する形状係数，形状粒径比を用いており，整理方法の有効性について述べてきた．そこで，今回の報告では，シミュレーションの考え方について詳しく述べるとともに，シミュレーションの結果から壁効果の分類を行ったので，ここに報告する．

2．形状係数と形状粒径比の定義

容器に均一の球形粒子を詰めた場合の断面図を図-1に示す．このモデル図の粒子配列は，密詰めであると考えられる俵積みとした．容器と粒子との境界面付近の粒子は，境界面の存在によって粒子接点数が異なることが分かっている．図に示されている境界面付近の黒く色分けされた部分は，粒子を詰めることのできない部分であり，これは容器に対して粒子径が大きいほど，または粒子径に対して容器が小さいほど間隙比に大きく影響してくると考えられる．また，図に示すように粒子が規則正しく充填された場合，最上部の層は必ずしも完全に満たされているとは限らず，蓋と粒子との間には大きな隙間ができると考えられ，このことも間隙比の変化に大きな影響を与えている．筆者らは，このような容器と粒子との境界面付近にできる空間が間隙比に与える影響を壁効果と呼び，その整理と分類を目的としている．

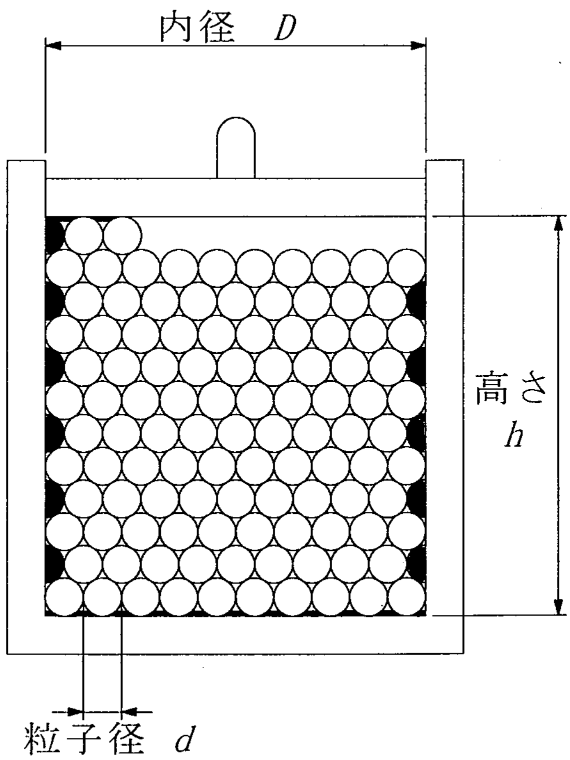


図-1　均一粒子充填におけるモデル断面図

容器形状（高さ，内径など）や粒子径の異なる充填実験の結果を比較する場合，一般には，その間隙比変化の傾向は容器内径や容器高さとの関係で整理されるが，一定の傾向的特徴は読み取れるものの，その表現

Influence of Wall Effects to Void Ratio of Uniform Granular Materials : Takeshi MAKI, Kazuo ITABASHI (Meijo Univ.), Hidetaka WADA (Kiso-Jiban Consultants Co., Ltd.)

方法は簡単ではない．そこで，容器の大きさを評価できるような単一の指標を考えた．容器形状を表現する一つの係数として，容器の表面積Aと体積Vの比を形状係数Rと定義した．また，容器内径D[cm]，高さh[cm]の円筒容器を用いた場合の容器表面積と体積の関係を以下に示す．

形状係数：$R=A/V=2/h+4/D$ [cm^{-1}]‥‥‥ (1)

このとき，形状係数 R は小さな容器ほど大きな値となり，大きな容器ほど小さな値となる．つまり，容器の小ささを表す係数と考えられる．ここで，真の間隙比，つまり容器表面の影響が全くない場合の間隙比について考えると，形状係数は0に近づく．R=0のとき，すなわちA=0あるいはV=∞のときの間隙比が真の間隙比と考えることができる．また，円筒容器の場合は，h,D=∞で表すことができる．

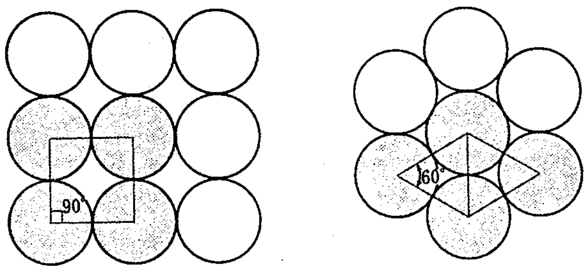
ところで，容器の大きさは，そこに詰める粒子の大きさとの相対関係で評価されるべきである．また，ここで定義した形状係数RはA/Vであるから単位[cm^{-1}]を持っている．そこで，この係数を無次元化すること，粒子の大きさとの相対関係を表現することを目的として，形状粒径比Rdを定義した．

形状粒径比：$Rd=R\times d$ [無次元]‥‥‥ (2)

形状粒径比についても真の間隙比を考えると，Rd=0のとき，すなわちR=0あるいはd=0のときである．容器が一定の大きさを持っているときは粒子径が無限に小さい状態であり，粒子径が一定の大きさを持っているときは容器が無限に大きい状態を示している．

3．粒子配列と充填シミュレーションの定義

大きさの等しい球の系統的な配列について一層目の配列を考えると，図-2に示すように，正方配列層（正方系）と六方系配列層（六方系）の二種類の基本配列がある．この二種類の基本配列の堆積構造は基本的に，立方配列，正斜方配列，楔形四面体配列，菱面体配列の四種類に区別できる．図-3は，そのうちで，間隙比が最も大きくなる立方配列（立方体充填）と，間隙比が最も小さくなる六方配列（菱面体充填）を示しており，その二種類についての定式化を考えた．定式化に当たっては，ある決められた断面を持つ容器に大きさの等しい球形粒子を一個ずつ充填し，その都度容器に落とし蓋をした場合を考え，そのときの容器の体積と表面積および間隙比を計算する．



正方配列層　　六方系配列層

図-2　基本配列層[5)]

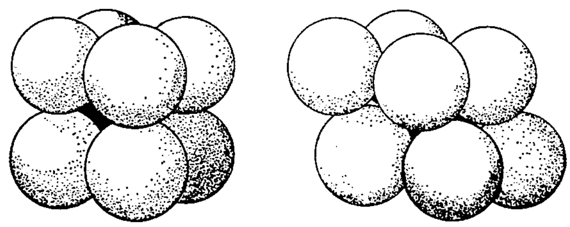

立方体充填　　菱面体充填

図-3　粒子配列[5)]

3-1. 立方体充填（simple cubic packing）

粒子の直径をdとして一辺にn個並んだ場合を考え，これを容器の大きさとして最初に決定する．このときの容器は一辺の長さがn･dとなり，図-4の平面図に示すような正方形平面を持つ．この容器に，粒子を一万個まで一個づつ充填するシミュレーションを行った．

図-4の断面図Aは，容器に粒子が一個充填された場合を示す．粒子の充填によって一層目が形成され，容器体積は平面積に粒子径をかけたものになる．

容器体積：$V=(n\cdot d)\cdot(n\cdot d)\cdot d=n^2d^3$‥‥‥ (3)　容器表面積：$A=2n^2d^2+4nd^2=2nd^2(n+2)$‥‥‥ (4)

したがって，形状係数Rは次式となる．

形状係数：$R=\dfrac{A}{V}=\dfrac{2nd^2(n+2)}{n^2d^3}=\dfrac{2}{d}\cdot\dfrac{n+2}{n}$ …… (5)

また，充填された粒子の体積 V_s と全体積 V とから，間隙比を求めることができる．

間隙比：$e=\dfrac{V}{V_s}-1=\dfrac{n^2d^3}{(\pi/6)d^3}-1=\dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{n^2}{1}-1$ …… (6)

容器の体積は，一層目が完全に充填されるまで変化しないので形状係数は不変であり，間隙比のみが粒子の増加に伴って減少していくと考えられる．

図-4 の断面図 B は，一層目が完全に充填された場合を示す．そのときの粒子数は，n^2 個である．このときの，間隙比について計算すると以下のようになる．

間隙比：$e=\dfrac{V}{V_s}-1=\dfrac{n^2d^3}{(\pi/6)d^3\cdot n^2}-1=\dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{n^2}{n^2}-1\fallingdotseq 0.910$ …… (7)

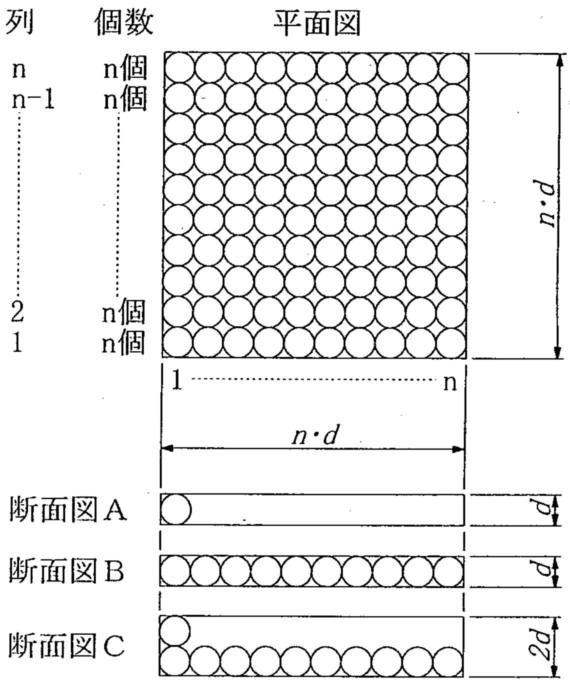


図-4　立方体充填

図-4 の断面図 C は，一層目が完全に充填されたのち，二層目に一個だけ粒子が入った場合を示す．そのときの粒子数は，n^2+1 個である．立方体充填では，一層目の粒子の直上に粒子が乗るため容器高さは h=2d となる．このときの，容器体積と表面積は以下のようになる．

容器体積：$V=n^2d^2\cdot 2d=2n^2d^3$ …… (8)

容器表面積：$A=2n^2d^2+4\cdot 2nd^2=2nd^2(n+2\cdot 2)$ …… (9)

このときの，形状係数と間隙比は以下のようになる．

形状係数：$R=\dfrac{A}{V}=\dfrac{2nd^2(n+2\cdot 2)}{2n^2d^3}=\dfrac{2}{d}\cdot\dfrac{n+2\cdot 2}{2n}$ … (10)　間隙比：$e=\dfrac{V}{V_s}-1=\dfrac{2n^2d^3}{(\pi/6)d^3\cdot(n^2+1)}-1=\dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{2n^2}{n^2+1}-1$ … (11)

二層目が完全に充填された場合について考える．立方体充填では，どの層も粒子配列が同じであるため，二層目までの全粒子数は $2n^2$ となる．形状係数は変わらないので，間隙比を求めると以下のようになる．

間隙比：$e=\dfrac{V}{V_s}-1=\dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{2n^2}{2n^2}-1\fallingdotseq 0.910$ …… (12)

このように，立方体充填では，ある層まで粒子が完全に充填された場合，間隙比は粒子径や容器の大きさにかかわらず一定になることが分かる．以上のことより，形状係数と間隙比の変化についてまとめると，以下に示すような一般式が得られる．

形状係数：$R=\dfrac{2}{d}\cdot\dfrac{n+2m}{m\cdot n}$ …… (13)　間隙比：$e=\dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{m\cdot n^2}{N}-1$ …… (14)

ここに，N は全粒子数，m は層数を表している．

3-2. 菱面体充填（tetrahedral packing）

菱面体充填においても，粒子の直径を d として一層目にきっちり詰められる容器の大きさを考える．菱面体充填の一層目を考えてみる（図-5 の平面図参照）．一列目の一辺に n 個の粒子を並べた場合，二列目の粒子数は n-1 個となる．このように，奇数列の粒子数は n 個，偶数列の粒子数は n-1 個となる．また，このとき一列目と同じ粒子数を持つ列を最終列にするため，最終列は n+1 列とした．このときの容器の大きさと粒子配列を図-5 の平面図に示す．したがって，菱面体充填では，容器の一辺はそれぞれ，$L1=nd$ ，$L2=\{(\sqrt{3}/2)n+1\}d$ となることから正方形平面にならないことが分かる．

図-5 の断面図 A は，容器に粒子が一個充填された場合を示す．粒子の充填によって一層目が形成され，容器体積は平面積に粒子径をかけたものになる．

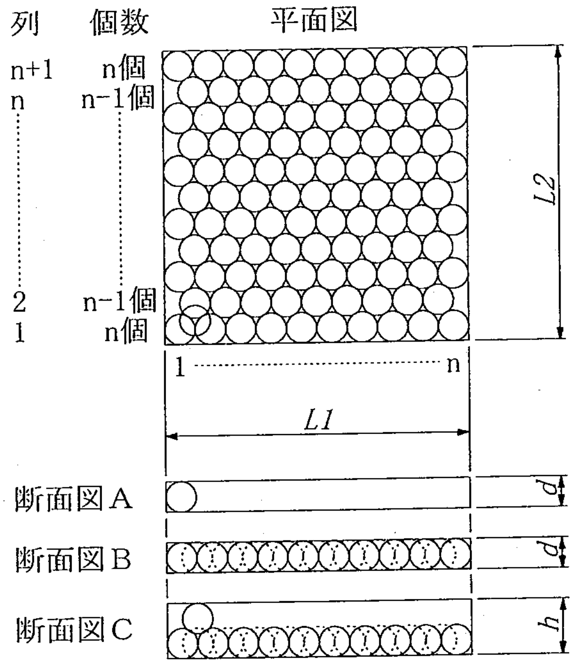


図-5　菱面体充填

容器体積：$V=nd\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n+1\right)d\cdot d=n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n+1\right)d^3$ …… (15)

容器表面積：$A=2nd\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n+1\right)d+2nd\cdot d+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n+1\right)d\cdot d$

$$=2d^2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}n^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)n+1\right\} \cdots\cdots (16)$$

形状係数：$R=\frac{A}{V}=\frac{2}{d}\cdot\frac{(\sqrt{3}/2)n^2+(2+\sqrt{3}/2)n+1}{n\{(\sqrt{3}/2)n+1\}}$ …… (17)

間隙比：$e=\frac{V}{V_s}-1=\frac{6}{\pi}\cdot\frac{n\{(\sqrt{3}/2)n+1\}}{2}-1$ …… (18)

容器の体積は，一層目が完全に充填されるまで変化しないので形状係数は不変であり，間隙比のみが粒子の増加に伴って減少していくと考えられる．

図-5 の断面図 B は，一層目が完全に充填された場合を示す．そのときの粒子数は，n(n+1/2) 個である．このときの，間隙比について計算すると以下のようになる．

間隙比：$e=\frac{V}{V_s}-1=\frac{6}{\pi}\cdot\frac{n\{(\sqrt{3}/2)n+1\}}{n(n+1/2)}-1$ …… (19)

図-5 の断面図 C は，一層目が完全に充填されたのち，二層目に一個だけ粒子が入った場合を示す．そのときの粒子数は，n(n+1/2)+1 個である．菱面体充填では，二層目の粒子は最も安定する 3 つの粒子の間に乗るため，容器高さは$h=(\sqrt{2/3}+1)d$となる．このときの，容器体積と表面積は以下のようになる．

容器体積：$V=nd\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n+1\right)d\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)d=n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n+1\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)d^3$ …… (20)

容器表面積：$A=2d^2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}n^2+\left(2+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)n+\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right\}$ …… (21)

このとき，形状係数と間隙比は以下のようになる．

形状係数：$R=\frac{A}{V}=\frac{2}{d}\cdot\frac{(\sqrt{3}/2)n^2+(2+\sqrt{2/3}+1/\sqrt{2}+\sqrt{3}/2)n+(1+\sqrt{2/3})}{n\{(\sqrt{3}/2)n+1\}(\sqrt{2/3}+1)}$ …… (22)

間隙比：$e=\frac{V}{V_s}-1=\frac{6}{\pi}\cdot\frac{n\{(\sqrt{3}/2)n+1\}(\sqrt{2/3}+1)}{n(n+1/2)+1}-1$ …… (23)

二層目が完全に充填された場合について考える．図-5 に示すように，二層目の粒子は一層目の粒子の間に充填されるため，充填できる粒子数は n(n-1/2) 個である．よって，二層目まで完全に充填された場合の粒子数は $2n^2$ になる．このときの形状係数は変わらないので，間隙比を計算すると以下のようになる．

間隙比：$e=\frac{V}{V_s}-1=\frac{6}{\pi}\cdot\frac{n\{(\sqrt{3}/2)n+1\}(1+\sqrt{2/3})}{n\{(n+1/2)+(n-1/2)\}}-1$ …… (24)

以上のことより，形状係数と間隙比についてまとめると，以下に示すような一般式が得られる．

形状係数：$R=\dfrac{2}{d}\cdot\dfrac{(\sqrt{3}/2)n^2+\{(2+\sqrt{3}/2)+(m-1)(\sqrt{2/3}+1/\sqrt{2})\}n+\{1+(m-1)\sqrt{2/3}\}}{n\{(\sqrt{3}/2)n+1\}\{1+(m-1)\sqrt{2/3}\}}$ ……(25)

間隙比：$e=\dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{n[\{(\sqrt{3}/2)n+1\}\{1+(m-1)\sqrt{2/3}\}]}{N}-1$ ……(26)

ここに，N は全粒子数，m は層数を表している．

4．シミュレーション結果の整理

一辺 4cm の容器を想定して，直径 2,4mm の二種類の粒子を 1 万個まで充填したシミュレーション結果を以下に示す．図 -6 に立方体充填，図 -7 に菱面体充填の間隙比～形状係数関係を示す．ここでは，ある層まで完全に充填された場合の間隙比を最密間隙比と定義し，最密間隙比の状態に 1 個のみ粒子が加わった状態の間隙比を最疎間隙比と定義した．もちろん，これらの間隙比の値は，容器の大きさや粒子径によって異なった値となることは明らかである．また，最密間隙比については直線的な変化を示していることから一次式で回帰式を，最疎間隙比は曲線的な変化を示していることから二次式で回帰式を求めた．

図 -6 より，詰める粒子数の増加に伴い形状係数は減少するが，それに伴い間隙比は規則的な増減を繰り返しながらある一定値に収束する傾向が見られる．最密間隙比に注目すると，間隙比は一定の値 e_0 ≒ 0.910 を示している．このことから，立方体充填では，層の増加に伴う壁効果は示さず，最疎間隙比の側のみ壁効果の現れることが分かった．また，その間隙比変化の幅は，粒子径が小さいほど小さくなっている．図 -7 より，菱面体充填でも同様に，粒子の増加に伴い間隙比は規則的な増減を繰り返しながらある一定値に収束する．しかし，立方体充填と異なる点は最密間隙比に減少傾向が見られることである．この式に勾配が出てくることは，容器高さが大きくなると間隙比が減少することに対応しており，間隙比に対する壁効果の一つを表している．また，形状係数 R=0 の時の間隙比は，粒子径が小さいものほど小さな値をとっている．菱面体充填における容器表面の影響がない場合の間隙比が e_0 ≒ 0.351 であることを考えると，容器に対して直径の小さい粒子を充填すると，壁の影響が小さくなると考えられる．すなわち，容器の大きさと粒子径の関係も壁効果の一つを表すものと考えられる．

以上の結果から，形状係数によって整理できる壁効果を図-8，図-9 に示す．図-8 は立方体充填における壁

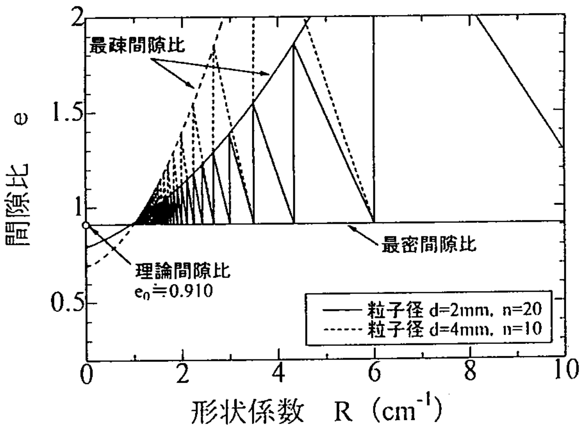


図-6 間隙比～形状係数関係（立方体充填）

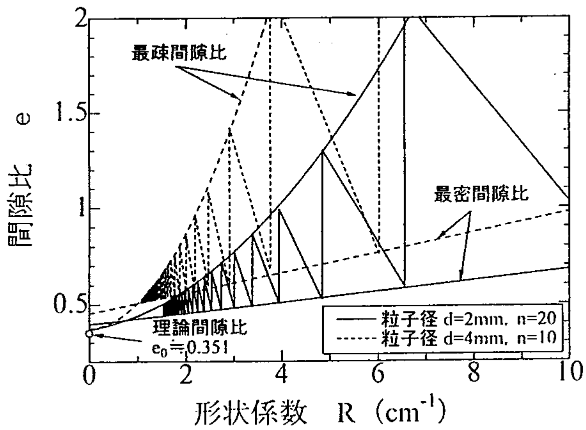


図-7 間隙比～形状係数関係（菱面体充填）

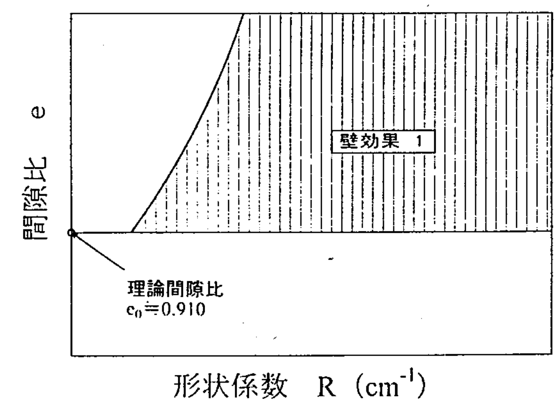


図-8 壁効果の整理（立方体充填）

効果の図を示す．立方体充填の粒子配列は，容器表面に影響されることなく規則正しく充填されるため，粒子をある層まで満たした場合，最密間隙比は一定値を示す．これは，層の増加に伴う壁効果がないことを示している．また，この値は立方体充填における最密間隙比の理論値である．よって，立方体充填の場合には，壁効果は一つしかなく，最疎間隙比の側のみ壁効果が現れる（壁効果 1）．図-9 は菱面体充填における壁効果の図を示す．立方体充填と同様に最疎間隙比の側に壁効果が現れる（壁効果 1）．そして，層の増加に伴い減少する壁効果がある（壁効果 2）．また，菱面体充填の粒子配列は容器表面の影響を受けており，最密間隙比の理論値にはならない．ここに，容器がある限り，なくなることのない壁効果が存在する（壁効果 3）．

図-10 に立方体充填，図-11 に菱面体充填の間隙比～形状粒径比関係を示す．図-10 より，形状粒径比で整理すると，それぞれ異なった収束点を持ち，最疎間隙比は，ほぼ同じ傾きを持つ曲線で表される．また，粒子径の小さいものほど図の左側へプロットされる．図-11 より，粒子径が小さいほど間隙比は大きな増減を示す．また，容器の大きさが同じであれば，充填する粒子径が異なっても，ある一定の範囲にプロットされることから，形状粒径比による整理の意味合いが感じられる．

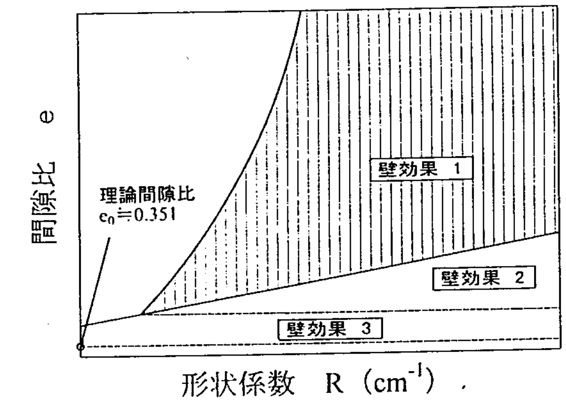


図-9　壁効果の整理(菱面体充填)

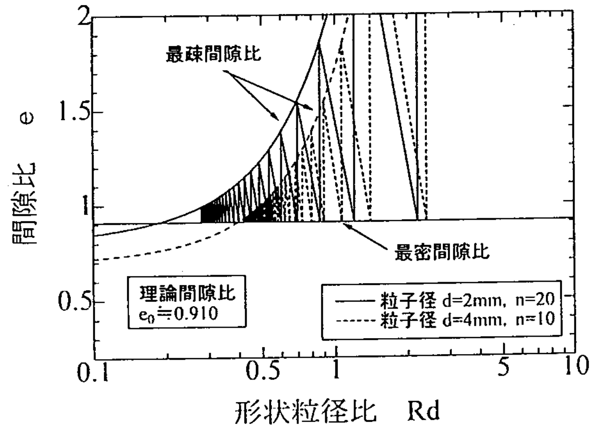


図-10　間隙比～形状粒径比関係(立方体充填)

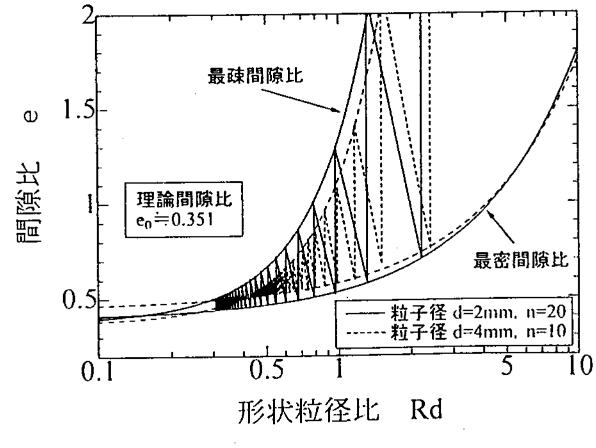


図-11　間隙比～形状粒径比関係(菱面体充填)

5．まとめ

①立方体充填ならびに菱面体充填の場合の，密度に対する壁効果の定式化ができた．

②シミュレーションの結果より，粒子数を増加させると間隙比が周期的な増減を繰り返すことが分かった．

③間隙比～形状係数の関係から，立方体充填ならびに菱面体充填の場合の壁効果について，整理と種類分けができた．

今後，種々の条件下での充填実験を実施し，ここに示したシミュレーション結果と比較したい．

参考文献

1) 板橋一雄,植下協:乱さない洪積熱田砂の力学的特性,土質工学会論文報告集,Vol.20,No.3,pp.101-109,1980.

2) 立石哲郎,板橋一雄,石川靖晃,蟹江伸次郎:積層体の密度に対する容器形状の影響と補正式の提案,土木学会中部支部平成 6 年度研究発表会,pp.367-368,1994.

3) 牧岳志,大脇忠雄,宮地純朗,板橋一雄：均一球の充填に対する壁効果の影響に関するシミュレーション,土木学会中部支部平成 9 年度研究発表会,pp.515-516,1998.

4) 宮地純朗,牧岳志,安藤中雄,板橋一雄：円筒容器へのステンレス球の最密充填に対する容器高さと内径の影響,土木学会中部支部平成 9 年度研究発表会,pp.513-514,1998.

5) 三輪茂雄:粉体工学,朝倉書店,1972.