

1、はじめに

複合材料の微視的な幾何学特性および各相の力学特性・界面特性が既知とする仮定の下で、代表体積要素（ユニットセル）から複合材料の巨視的な力学特性を評価する方法が多数存在している。しかし、代表体積要素における各構成材料の力学特性がすべて分かるという仮定が成立しない場合もある。本論文では、複合材料構造の境界値問題のマクロ的な観測量（たとえば、変位）から、複合材料のミクロ的な（たとえば、混合相あるいは界面）構成材料の力学特性を同定する一手法を提案するとともに、線形弾性微小変形問題を例にして逆解析の数値シミュレーションを行い提案手法の適用性を検討する。

2、問題の定式化

図-1 に示すように、座標系  $x_i (i=1,2,3)$  にある構造物  $\Omega$  の境界値問題を考える。

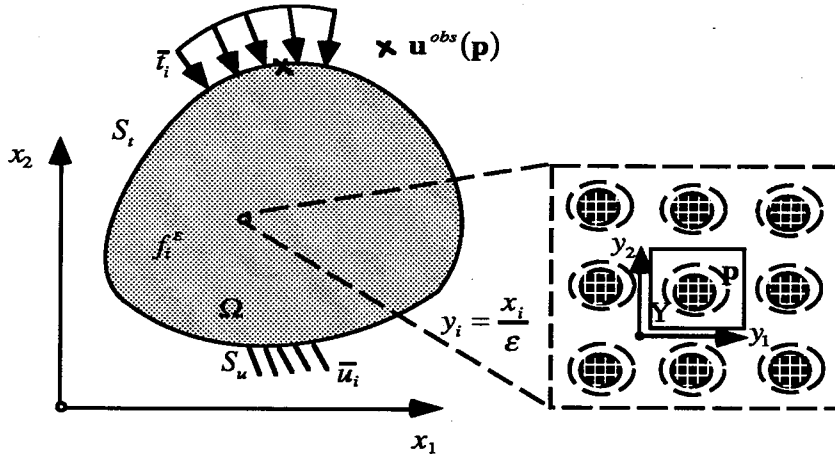


図-1 巨視構造物と微視ユニットセル

体積力  $f_i^e$  および荷重境界  $S_i$  上の外部作用力  $\bar{f}_i$  が既知であり、変位境界  $S_u$  上の変位  $\bar{u}_i$  も既知である。 $\Omega$  の構成材料は微視的な周期構造（ユニットセル  $Y$ ）を有するものとする。微小パラメータ  $\epsilon$  を用いて  $y_i = x_i / \epsilon$  で定義した微視的な座標系  $y_i (i=1,2,3)$  を導入する。 $y_i$  にあるユニットセル  $Y$  の幾何構造は既知であるが、 $Y$  の中にある材料の力学特性は未知なものが存在する。それらを未知パラメータ  $p_i$  と定義する。いま、荷重境界  $S_i$  において幾つか点  $(\times)$  での変位  $u_i^{obs}$  が観測された場合には、未知パラメータ  $p_i$  を同定する手法をつぎのように提案する。

2.1  $u_i^{obs}$  と  $p_i$  の関係式： $u_i^{obs}(p_k)$  - 均質化法の適用

構造物  $\Omega$  の観測変位  $u_i^{obs}$  とユニットセル  $Y$  の未知力学パラメータ  $p_i$  との関係はつぎの弾性問題の方程式で規定されている。

$$\sigma_{ij,x(j)}^e + f_i^e = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl}^e e_{x(k)}(u^e), \quad e_{x(ij)}(u^e) = (u_{i,x(j)}^e + u_{j,x(i)}^e) / 2 \tag{2 a,b}$$

$$\sigma_{ij}^e n_j = \bar{f}_i \quad \text{on } S_i, \quad u_i^e = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \tag{3 a,b}$$

弾性テンソル  $E_{ijkl}^e$  が対称正定値であれば、 $u_i^{obs}(p_k)$  は唯一なものである。ただし、 $\Omega$  が非均質であるために、式 (1) ~ (3) に対して有限要素法を適用すると、未知数が非常に多いので計算は困難となる。そこで、均質化理論を用いて元の問題を等価的な均質問題に変換し、 $\Omega$  変位場  $u_i^e$  と応力場  $\sigma_{ij}^e$  の漸近解を求める。以下では、その概要を示す<sup>[1]</sup>。

変位  $u_i^e$  を式 (4) のように漸近展開を行い、それよりひずみ場  $e_{x(k)}(u^e)$  が式 (5) のように計算される。ただし、ここで微分則  $(\#)_{,x(i)}^e = (\#)_{,x(i)} + \epsilon^{-1}(\#)_{,y(i)}$  を用いた。また、添字  $x(i) \equiv \partial / \partial x_i$  と、 $y(i) \equiv \partial / \partial y_i$  としている。

$$u_i^e = u_i^0 + \epsilon u_i^1 + \epsilon^2 u_i^2 + \dots \tag{4}$$

$$e_{x(ij)}(u^e) = \epsilon^{-1} e_{y(ij)}(u_k^0) + e_{x(ij)}(u_k^0) + e_{y(ij)}(u_k^1) + \epsilon(e_{x(ij)}(u_k^1) + e_{y(ij)}(u_k^2)) + \dots \tag{5}$$

また、応力場  $\sigma_{ij}^\varepsilon$  の漸近展開は式 (6) で与える。

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 + \varepsilon \sigma_{ij}^2 + \dots \quad (6)$$

式 (5) と (6) を式 (2a) に代入し、 $\varepsilon$  の同次べきの係数がゼロである条件より、

$$\sigma_{ij}^0 = E_{ijkl}^\varepsilon e_{y(kl)}(u_s^0), \quad \sigma_{ij}^1 = E_{ijkl}^\varepsilon (e_{x(kl)}(u_s^0) + e_{y(kl)}(u_s^1)), \quad \sigma_{ij}^2 = E_{ijkl}^\varepsilon (e_{x(kl)}(u_s^1) + e_{y(kl)}(u_s^2)) \quad (7a,b,c)$$

が得られる。同様に、式 (6) を応力釣合方程式 (1) に代入すると、

$$\sigma_{ij,y(j)}^0 = 0, \quad \sigma_{ij,x(j)}^0 + \sigma_{ij,y(j)}^1 = 0, \quad \sigma_{ij,x(j)}^1 + \sigma_{ij,y(j)}^2 + f_i^\varepsilon = 0 \quad (8a,b,c)$$

が得られる。そこで、式 (7a) と (8a) より、

$$\sigma_{ij}^0 = 0, \quad u_i^0 = u_i^0(x_k) \quad (9a,b)$$

が導きだした。つまり、 $u_i^0$  は微視変数  $y_i$  とは関係なくニューニットセルに対して定数であり、ひとつのパラメータとみなせる。したがって、つぎのようにユニットセルの特性関数  $\chi_i^{(kl)}$  を導入することができる。

$$u_i^1 = -\chi_i^{(kl)} e_{x(kl)}(u_s^0) + \varphi_i(x_k) \quad (10)$$

ここで、 $\varphi_i(x_k)$  は  $x_i$  の任意な関数である。変位特性関数  $\chi_i^{(kl)}$  の意味としては、均一のひずみ (巨視的なひずみ)  $e_{x(kl)}(u_s^0)$  をユニットセルに与える際に、材料非均質分布によりユニットセル内においてどのぐらい一階のズレ変位  $u_i^1$  を生じるかを表している。

さらに、式 (7b) と (10) より

$$\sigma_{ij}^1 = (E_{ijkl}^\varepsilon - E_{ijpq}^\varepsilon \chi_{p,y(q)}^{(kl)}) e_{x(kl)}(u_s^0) \quad (11)$$

と書ける。そして、式 (11) の両辺をユニットセルでの平均計算を行うと、均質化された材料の構成式がつぎのように導かれる。

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle = \langle E_{ijkl}^\varepsilon - E_{ijpq}^\varepsilon \chi_{p,y(q)}^{(kl)} \rangle e_{x(kl)}(u_s^0) \equiv E_{ijkl}^H e_{x(kl)}(u_s^0) \quad (12)$$

$$E_{ijkl}^H \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y (E_{ijkl}^\varepsilon - E_{ijpq}^\varepsilon \chi_{p,y(q)}^{(kl)}) dY \quad (13)$$

ここで、 $\langle \# \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\#) dY$  はユニットセルでの平均計算を表わし、 $|Y|$  はユニットセルの体積 (あるいは面積) である。 $E_{ijkl}^H$  は均質化弾性テンソルである。

一方、式 (7b)、(8b) および式 (10) より演算すると、変位特性関数  $\chi_i^{(kl)}$  の弱形式はつぎのように導かれる。

$$\int_Y E_{ijpq}^\varepsilon \chi_{p,y(q)}^{(kl)} v_{i,y(j)} dY = \int_Y E_{ijkl}^\varepsilon v_{i,y(j)} dY \quad (14)$$

そして、ユニットセルでの周期境界条件のもとで、式 (14) より  $\chi_i^{(kl)}$  が求められる。

結局、均質化法の適用により、観測変位  $u_i^{\text{obs}}$  を含んだ構造物  $\Omega$  の平均変位場  $u_i^0$  は、式 (15) で支配される。

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i^H(\mathbf{x}) v_i^0 d\Omega + \int_{S_i} t_i v_i^0 ds \quad (15)$$

したがって、構造物の観測変位  $u_i^{\text{obs}}$  とユニットセル内の材料の未知力学パラメータ  $p_k$  の関係  $u_i^{\text{obs}}(p_k)$  は、有限要素法を介して数値的に結ばれている。

## 2.2 $u_i^{\text{obs}}$ から $p_k$ を同定するアルゴリズム—拡張カルマンフィルターフィルタの適用

拡張カルマンフィルターフィルタの逆解析問題への適用は多くあり、その詳細が文献にゆずる<sup>[2]</sup>。ここで、計算のアルゴリズムを示しておく。いま、ユニットセル内の材料の未知力学パラメータ  $\mathbf{p}$  は時間に依存しない未知状態ベクトルと仮定する。状態方程式は (16) 式で、観測方程式は (17) 式で表わす。

$$\mathbf{p}_{t+1/t} = \mathbf{p}_{t/t} + \mathbf{w}_t \quad (16)$$

$$\mathbf{u}_t^{\text{obs}} = \mathbf{u}_t(\mathbf{p}) + \mathbf{v}_t \quad (17)$$

拡張カルマンフィルターフィルタによると、適当な初期値  $\mathbf{p}_{0/0}$  と  $\mathbf{P}_{0/0}$  から出発し、つぎの繰り返し計算により観測データ  $u_i^{\text{obs}}$  を取り入れることにつれ、未知状態ベクトル  $\mathbf{p}$  を同定することができる。

$$\text{状態方程式による更新:} \quad \mathbf{p}_{t+1/t} = \mathbf{p}_{t/t} \quad (18)$$

$$\mathbf{p}_{t+1/t} = \mathbf{p}_{t/t} + \mathbf{Q}_{t+1}$$

$$\text{カルマンゲイン:} \quad \mathbf{G}_{t+1/t} = \mathbf{P}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}^T (\mathbf{H}_{t+1/t} \mathbf{P}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}^T + \mathbf{R}_{t+1})^{-1} \quad (19)$$

観測による更新：
$$\mathbf{p}_{t+1/t+1} = \mathbf{p}_{t+1/t} + \mathbf{G}_{t+1/t} (\mathbf{u}^{obs} - \mathbf{u}(\mathbf{p}_{t+1/t})) \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{t+1/t+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}) \mathbf{P}_{t+1/t} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t})^T + \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{R}_{t+1} \mathbf{G}_{t+1/t}^T$$

ただし、感度行列  $\mathbf{H}_{t+1/t} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{t+1/t}}$  は中心差分法で求め、そこに均質化法の有限要素解を用いられる。変位特性

関数  $\chi_i^{(kl)}$  の周期条件はペナルティ法で取り込んでいる。また、 $\mathbf{w}_i$  はシステムノイズであり、 $\mathbf{v}_i$  は観測ノイズである。 $\mathbf{Q}_i = E[\mathbf{w}_i \otimes \mathbf{w}_i]$ ,  $\mathbf{R}_i = E[\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i]$ .  $\mathbf{P}$  は推定誤差共分散であり、 $\mathbf{P} = E[(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \otimes (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})]$ .  $E[\cdot]$  は期待値演算子である。

### 3、数値シミュレーション

図-2に示すように、一軸引っぱり試験片の一点(節点25)での観測変位から、試験片材料の微視構造(ユニットセル)内の未知材料の弾性係数  $E$  とポアソン比  $\nu$  を同定する数値シミュレーションを行う。二種類のユニットセルについての同定結果を以下に示す。

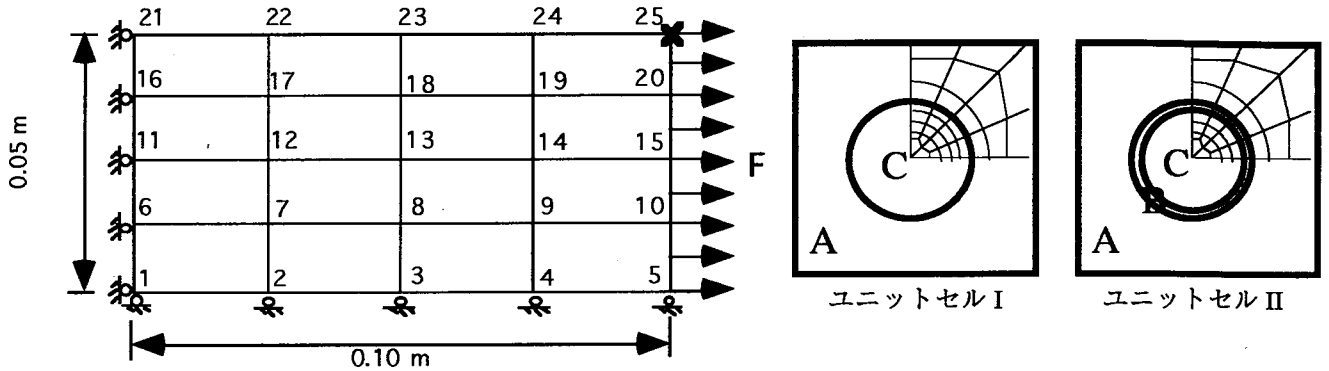
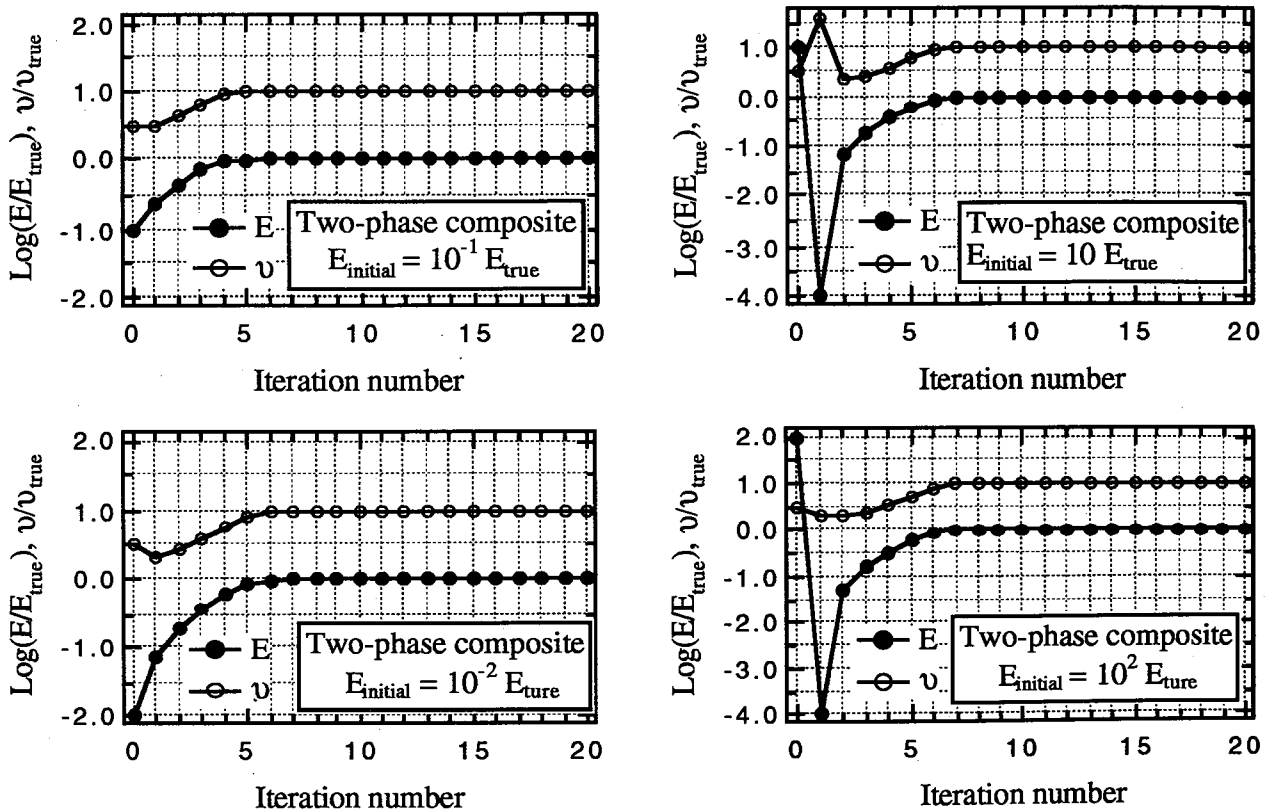


図-2 逆解析の例

#### 3.1 二相複合材料(ユニットセルI)

ユニットセルIが2種類の線弾性材料(A,C)で構成され、材料Aの弾性係数  $E_A$  とポアソン比  $\nu_A$  が既知であることを仮定する。材料Cの弾性係数  $E_C$  とポアソン比  $\nu_C$  を節点25での観測変位から同定する。図-3に示すように、広い範囲の初期値に対しては安定な同定結果を得られた。



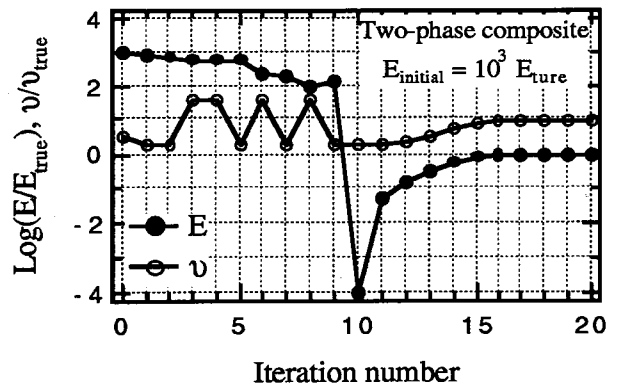
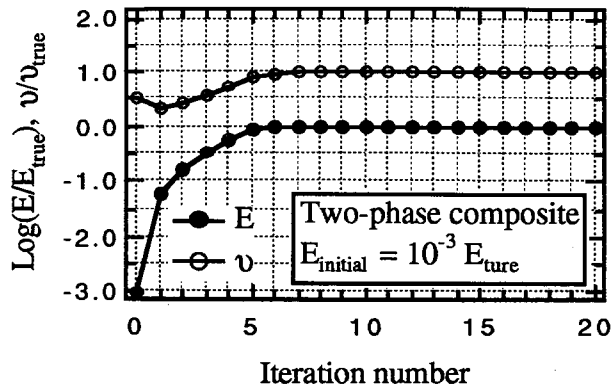


図-3 二相複合材料の同定 (ユニットセル I)

### 3. 2 三相複合材料 (ユニットセル II)

ユニットセル II が 3 種類の線弾性材料 (A, B, C) で構成され, 材料 A, C の弾性係数  $E_A$ ,  $E_C$  およびポアソン比  $\nu_A$ ,  $\nu_C$  が既知であることを仮定する. 材料 B の弾性係数  $E_B$  とポアソン比  $\nu_B$  を節点 25 での観測変位から同定する. 図-4 に示すように, 広い範囲の初期値に対しても安定な同定結果を得られた.

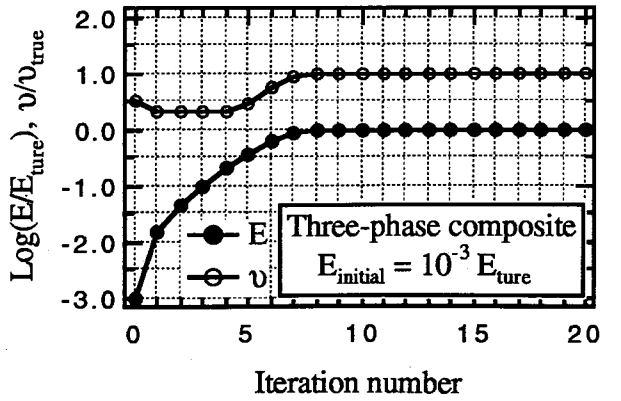
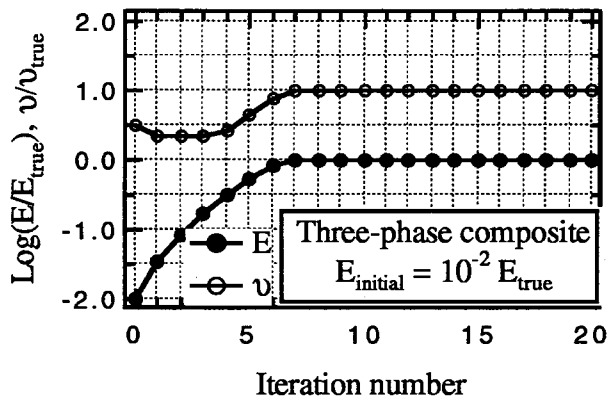
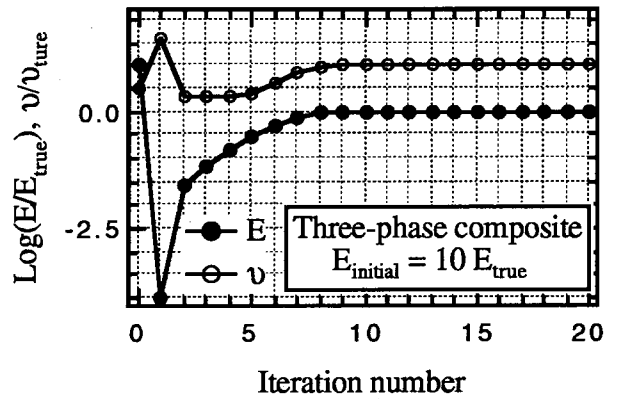
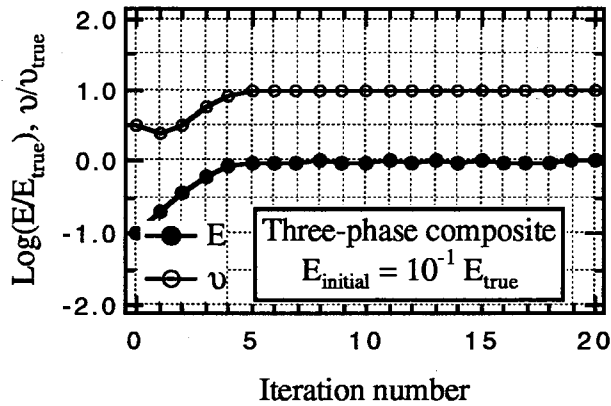


図-4 三相複合材料の同定 (ユニットセル II)

### 4. おわり

均質化法を取り込んだ逆解析による複合材料の微視構造内の未知力学特性を評価する手法を提案した. 多相線弾性複合材料の未知相の弾性係数とポアソン比の同定解析を行い, 広範囲の初期値に対しても良い同定結果を得られました. 提案手法の実問題への適用性の検討が必要であり, 今後の課題とする.

参考文献 [1] Sanchez-Palencia, E. (1980): Nonhomogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, Vol 127. Springer-Verlag, Berlin. [2] Jazwinski, A. H. (1970): *Stochastic Process and Filtering Theory*, Academic press.