

# 構造異方性地盤の応力・変形解析

住友セメント(株) 石崎 仁

実際の堆積地盤は構造的にも初期応力的にも異方性を有しているが、本文では構造異方性に限定し、その応力・変形解析について述べる。構造異方性に関する研究は以前から行われているが、小田ら<sup>1)</sup>、Arthurら<sup>2)</sup>や山田ら<sup>3)</sup>は、応力・変形特性に着目して興味ある知見を示した。また、佐武<sup>4)</sup>や大嶺<sup>5)</sup>は、異方性テンソルによる修正応力を用いて、異方性土の破壊規準について述べた。石崎ら<sup>6)</sup>は、同義の異方性パラメータを導入して、応力～ひずみ関係式と破壊規準を示した。一方、松岡ら<sup>7)</sup>は、異方性の弱主面と滑動面のなす角度に着目して、応力～ひずみ関係式と破壊規準を提案した。その他にも多くの研究結果があるが、いずれも客観性や平衡方程式を満足していない。すなわち、主応力と構造異方性の主軸が一致していない場合でも、主応力方向に主ひずみ増分が生じたり、異方性テンソルにより修正された応力テンソルが非対称になり、ひずみテンソルと一義的に関係づけられないなどの問題点がある。本文では、基本的には異方性テンソルによる方法を用いるが、偶応力を導入することによって、上記の問題点を解消した解析手法を示し、その解析結果について述べる。

## 1. 異方性テンソルによる実応力と仮想応力

構造異方性土の応力・変形特性を、次式で表される仮想応力空間 $\bar{\sigma}_{ij}$ で考える。

$$\bar{\sigma}_{ij} = (H_{ik} \cdot \sigma_{kj}) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\bar{\sigma}_{ij}$ ; 仮想応力空間の応力テンソル  
 $\sigma_{ij}$ ; 実応力空間の応力テンソル  
 $H_{ij}$ ; 異方性テンソル

ただし、実応力空間と仮想応力空間の座標系は一致している。異方性テンソルは2階のテンソルである。たとえば、直交異方性土の主軸座標 $(x', y', z')$ が基準座標 $(x, y, z)$ に対して角度 $\delta$ だけ傾いている場合(図-1参照、ただし、 $z'$ と $z$ は一致している)には、異方性テンソル $H_{ij}$ は次式で表される。

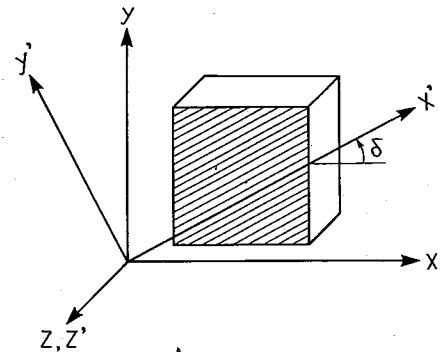


図-1 異方性主軸と基準座標の関係

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} H_x \cdot \cos^2 \delta + H_y \cdot \sin^2 \delta & (H_x - H_y) \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta & 0 \\ \text{sym.} & H_x \cdot \sin^2 \delta + H_y \cdot \cos^2 \delta & 0 \\ & & H_z \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $H_x, H_y, H_z$ ; 異方性テンソルの主値  
 異方性テンソルおよび実応力テンソルは対称であるが、式(1)で示される仮想応力テンソルは一般に非対称である。さて、式(1)を微分すると、次式となる。

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = H_{ik} \cdot \dot{\sigma}_{kj} + \dot{H}_{ik} \cdot \sigma_{kj} \dots \dots \dots (3)$$

式(3)を実応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ について示すと

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ik}^{-1} \cdot (\dot{\bar{\sigma}}_{kj} - \dot{H}_{ki} \cdot \sigma_{ij}) \dots \dots \dots (4)$$

ここに、上付き-1は逆テンソルを意味する。

式(4)の右辺括弧内の第1項は内部応力速度、第2項は要素の変形移動に伴う境界応力の不平衡速度を表している。異方性テンソルは主軸の回転により変化するため、異方性テンソルの微分 $\dot{H}_{ij}$ は、次式で表される。

Deformation analysis of inherent anisotropic soil. Hitoshi Ishizaki, SUMITOMO CEMENT CO.,LTD.

$$\dot{H}_{ij} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial \delta} \dot{\delta} = (H_x - H_y) \cdot \begin{bmatrix} -\sin 2\delta & \cos 2\delta & 0 \\ \cos 2\delta & \sin 2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\delta} \quad \dots \dots \dots (5)$$

回転速度  $\dot{\delta}$  を変形勾配速度で表わすと、式(5)は次式となる。

$$\dot{H}_{ij} = (H_x - H_y) \cdot \begin{bmatrix} -\sin 2\delta & \cos 2\delta & 0 \\ \cos 2\delta & \sin 2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\dot{e}_{xy} - \dot{e}_{yx}) / 2 \quad \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $\dot{e}_{ij}$ ；変形勾配速度テンソル、平面問題では次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{xx} & \dot{e}_{xy} \\ \dot{e}_{yx} & \dot{e}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \dot{u} / \partial x & \partial \dot{v} / \partial x \\ \partial \dot{u} / \partial y & \partial \dot{v} / \partial y \end{bmatrix}, \quad \dot{e}_{zz} = \partial \dot{w} / \partial z$$

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ ; x, y, z 方向の変位速度

## 2. 構造異方性土の平衡方程式

本文では、等方性土の応力～ひずみ関係に仮想応力  $\overline{\sigma}_{ij}$  およびその速度  $\dot{\overline{\sigma}}_{ij}$  を用いて、構造異方性土特有の応力・変形特性を表現しようと試みているが、仮想応力  $\overline{\sigma}_{ij}$  およびその速度  $\dot{\overline{\sigma}}_{ij}$  は非対称テンソルであるため、変形の客観性を満足しない。なぜなら、応力テンソルと対応するひずみテンソルは対称であるからである。中井ら<sup>8)</sup>は、異方性テンソルを応力比テンソル  $X_{ij}$  に作用させ、そのうちの対称成分を用いて、応力～ひずみ関係を表しているが、平衡条件を満足するためには、残りの反対称成分を無視することはできない。ここでは、仮想応力速度  $\dot{\overline{\sigma}}_{ij}$  を対称成分と反対称成分に分解して考える。平面問題では、次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{\sigma}}_{xx} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{yy} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{zz} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{xy} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{yx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\overline{\sigma}}_{xx} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{yy} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{zz} \\ (\dot{\overline{\sigma}}_{xy} + \dot{\overline{\sigma}}_{yx})/2 \\ (\dot{\overline{\sigma}}_{xy} + \dot{\overline{\sigma}}_{yx})/2 \end{bmatrix} + \frac{\dot{\overline{\sigma}}_{xy} - \dot{\overline{\sigma}}_{yx}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (7)$$

式(7)の右辺第2項  $(\dot{\overline{\sigma}}_{xy} - \dot{\overline{\sigma}}_{yx})/2$  は偶応力速度を意味しており、物体を剛体回転させようと作用するものである。構造異方性土の応力～ひずみ関係は、次式で表されるとする。

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{\sigma}}_{xx} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{yy} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{zz} \\ \dot{\overline{\tau}}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_{xx} \\ \dot{e}_{yy} \\ \dot{e}_{zz} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ここで、 $\dot{\overline{\tau}}_{xy} = (\dot{\overline{\sigma}}_{xy} + \dot{\overline{\sigma}}_{yx})/2$  ,  $\dot{e}_{ij}$ ；垂直ひずみ速度 (i=j)  $\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ji}$   
 $D_{ij}$ ；応力～ひずみマトリックス ,  $\dot{\gamma}_{ij}$ ；工学せん断ひずみ (i≠j)  $\dot{\gamma}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{e}_{ji}$

式(8)を式(7)に代入すると

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{\sigma}}_{xx} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{yy} \\ \dot{\overline{\sigma}}_{zz} \\ \dot{\overline{\tau}}_{xy} \\ \dot{\overline{\tau}}_{yx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{14} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{24} & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{34} & 0 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{44} & 1 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{44} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_{xx} \\ \dot{e}_{yy} \\ \dot{e}_{zz} \\ \dot{e}_{xy} \\ \dot{e}_{yx} \\ \dot{M} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 $\dot{M} = (\dot{\overline{\sigma}}_{xy} - \dot{\overline{\sigma}}_{yx})/2$

式(6),(9)を式(4)に代入すると、実応力速度とひずみ速度の関係式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \\ \dot{\sigma}_{yy} \\ \dot{\sigma}_{zz} \\ \dot{\sigma}_{xy} \\ \dot{\sigma}_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{xx} & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \\ 0 & G_{yy} & 0 & G_{yx} & 0 \\ 0 & 0 & G_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & G_{xy} & 0 & G_{xx} & 0 \\ G_{yx} & 0 & 0 & 0 & G_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14}-A_1 & D_{14}+A_1 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24}-A_2 & D_{24}+A_2 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34}-A_3 & D_{34}+A_3 & 0 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44}-A_4 & D_{44}+A_4 & 1 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44}-A_5 & D_{44}+A_5 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{xx} \\ \dot{e}_{yy} \\ \dot{e}_{zz} \\ \dot{e}_{xy} \\ \dot{e}_{yx} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 $G_{ij}$ ；異方性逆テンソル $H_{ij}^{-1}$ の成分、 $A_1 \sim A_5$ ； $A_{ij}$ のベクトル表示  $A_{ij} = \dot{H}_{ik} \sigma_{kj} / 2$   
 実応力空間では、応力テンソルは対称であるから、 $\dot{\sigma}_{xy} = \dot{\sigma}_{yx}$ より

$$\dot{\sigma}_{xy} - \dot{\sigma}_{yx} = \{-G_{yx} \ G_{xy} \ 0 \ G_{xx} \ -G_{yy}\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14}-A_1 & D_{14}+A_1 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24}-A_2 & D_{24}+A_2 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34}-A_3 & D_{34}+A_3 & 0 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44}-A_4 & D_{44}+A_4 & 1 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44}-A_5 & D_{44}+A_5 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{xx} \\ \dot{e}_{yy} \\ \dot{e}_{zz} \\ \dot{e}_{xy} \\ \dot{e}_{yx} \\ \dot{M} \end{Bmatrix} = 0 \dots \dots (11)$$

式(11)を偶応力速度 $\dot{M}$ について解き、式(10)に代入して縮約すると、実応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ は変形勾配速度 $\dot{e}_{ij}$ と一義的に結び付けられる。すなわち、次式の一般形が得られる。

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \{\dot{e}\} \dots \dots \dots (12)$$

偶応力速度 $\dot{M}$ は、要素を剛体回転させまいとする内部不定応力として、式(12)に組み込まれている。なお、応力～ひずみマトリックス $[D]$ を計算する際に必要な応力成分は、仮想応力の対称成分に置き換えて計算すればよい。通常の構成式は応力～ひずみ関係で与えられるが、本手法では、応力～変形勾配関係で示されている。これは、異方性テンソル速度 $\dot{H}_{ij}$ が回転速度と関係づけられているからである。

式(11)に、仮想仕事の原理または変分法を適用すれば、次式の有限要素方程式が得られる。

$$[[B.]^T [D] [B.]] \{\dot{V}\} = \{\dot{f}\} \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 $[B.]$ ；変位～変形勾配マトリックス、平面問題で記せば、次式のようなになる。

$$[B.] = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial x & 0 & \dots \dots \dots & \partial N_n / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_1 / \partial y & \dots \dots \dots & 0 & \partial N_n / \partial y \\ 0 & \partial N_1 / \partial x & \dots \dots \dots & 0 & \partial N_n / \partial x \\ \partial N_1 / \partial y & 0 & \dots \dots \dots & \partial N_n / \partial y & 0 \end{bmatrix}$$

$N_i$ ；形状関数、 $i = 1 \sim n$ で、 $n$ は有限要素節点数

$\{\dot{V}\}$ ；節点変位速度ベクトル

$\{\dot{f}\}$ ；節点荷重速度ベクトル

### 3. 構造異方性土の要素試験

ここでは、構造異方性土の要素試験の応力・変形特性を前節に述べた方法により解析する。土は密詰めめの豊浦砂を想定し、構成式はSMP\*モデル<sup>9)</sup>を用いる。SMP\*モデルは、土特有のダイラタンシー現象や中間主応力の影響を良く表現できる弾塑性構成式であり、表-1に材料パラメータを示す。これらの値は等方性土に対して求められたものであるが、異方性土にも同じ値を用いて解析する。さて、図-1の軸直交異方性土では、式(2)の主値

表-1 SMP\*モデルのパラメータ

$\lambda^*$	0.9	
$\mu^*$	0.27	
$\mu^{**}$	0.41	
$\gamma_o^*$	$\gamma_{oi}^*$	0.10 %
	$C_d^*$	0.066 %
	$\sigma_{no}$	98.0 kN/m <sup>2</sup>
$C_o / (1+e_o)$	0.928 %	
$C_s / (1+e_o)$	0.578 %	
$K_o$	0.45	
$\nu_o$	0.3	
$\phi_{(comp.)}$	40.0°	
$\gamma_{sat}$	19.4 kN/m <sup>3</sup>	

は  $H_x' = H_z' \neq H_y'$  となる。さらに、 $y'$  方向に堆積した場合、 $y'$  方向は  $x'$  および  $z'$  方向に比べて圧縮量が小さいと考えられるので、 $H_x' = H_z' > H_y'$  となる。三軸試験のせん断強度を最大・最小主応力比  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  で表すと、等方性土では、三軸圧縮試験と三軸伸張試験の  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  は同じである。上記の軸直交異方性土の主軸  $y'$  と三軸試験の軸方向が一致する試験では、三軸圧縮試験の  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  は三軸伸張試験のそれより大きい。そして、異方性テンソルの主値と応力比  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  との間には、次式の関係がある。

$$\frac{H_y'}{H_x'} = \sqrt{\frac{(\sigma_1/\sigma_3)_{f,ext.}}{(\sigma_1/\sigma_3)_{f,comp.}}} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $(\sigma_1/\sigma_3)_{f,comp.}$  ; 三軸圧縮試験の破壊時の最大・最小応力比  
 $(\sigma_1/\sigma_3)_{f,ext.}$  ; 三軸伸張試験の破壊時の最大・最小応力比

佐武<sup>4)</sup> や中井ら<sup>8)</sup> は、異方性テンソルの主値の和  $H_{ii} (= \delta_{ij} H_{ij}) = 1$  としているが、必ずしも  $H_{ii} = 1$  である必要はない。たとえば、体積圧縮量は平均主応力  $p$  に影響されることを考えると、 $H_{ii} \neq 1$  も有り得る。その場合、 $H_{ii}$  は等方性土と異方性土の応力～ひずみ関係の比較により決定される。本文では、前例にならって、 $H_{ii} = 1$  とする。なお、主値  $H_x' = H_y' = H_z' = 1$  の場合は、等方性土となる。なお、本文では以下、圧縮応力および圧縮ひずみを正とする。

1) 三軸圧縮・伸張試験の応力～ひずみ関係

図-2, 3 は、堆積方向が軸方向に一致している ( $\delta = 0^\circ$ ) 場合の平均主応力  $p (= 392 \text{ kN/m}^2)$  一定の三軸圧縮および伸張試験の最大・最小主応力比  $\sigma_1/\sigma_3$  ～主ひずみ  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  ～体積ひずみ  $\varepsilon_v$  関係である。これらの図では、異方性土は  $H_y'/H_x' = 0.9$  として計算しているが、等方性土の応力～ひずみ関係も示している。三軸圧縮試験 (図-2) では、異方性土 (図中の破線) は等方性土 (図中の実線) より変形しにくく、強度 (破壊時の主応力比  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$ ) も大きい。三軸伸張試験 (図-3) では逆の傾向を示している。すなわち、堆積方向と直交する方向 (堆積面) に最大主応力が作用する場合には、変形しやすく、強度は小さい。これらは、実測値<sup>8)</sup> の傾向と一致している。図-2, 3 で、異方性土と等方性土の主ひずみ～体積ひずみ関係はほとんど同じである。一方、中井ら<sup>8)</sup> の解析では、実測値と同様の傾向 (異方性土は等方性土より、三軸圧縮では体積圧縮量が小さく、ダイラタンスーが大きい。三軸伸張試験ではその逆となる。) を良く表現している。それは、塑性ポテンシャルが実応力による応力  $t_n$  と異方性テンソルにより修正された応力比テンソル  $X_{ij}$  で表されているから、Stress-dilatancy 関係の実応力経路での依存性が表現できるのである。本手法でも同様の扱いは可能であるが、式(7)以降が複雑になる。式(8)は、第一近似と見るべきであろう。

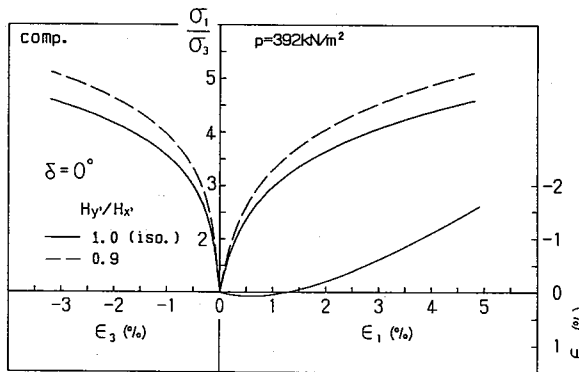


図-2 三軸圧縮試験の応力～ひずみ関係 ( $\delta = 0^\circ$ )

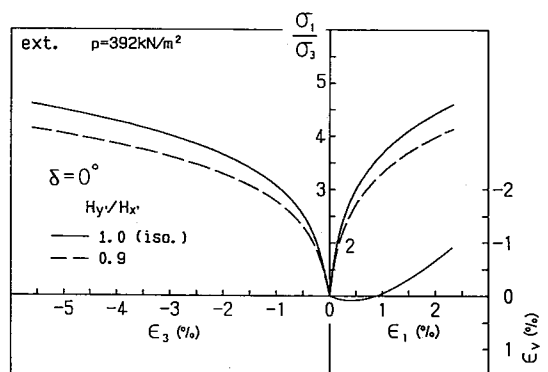


図-3 三軸伸張試験の応力～ひずみ関係 ( $\delta = 0^\circ$ )

2) 平面ひずみ圧縮試験の応力～ひずみ関係

図-4 は、側圧一定 ( $\sigma_x = 196 \text{ kN/m}^2$ ) の平面ひずみ圧縮試験における等方性土および異方性土 ( $\delta = 0^\circ, 90^\circ$ ) の最大・最小主応力比  $\sigma_1/\sigma_3 (= \sigma_y/\sigma_x)$  ～主ひずみ  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  関係である。ここでも、三軸圧縮・伸張試験

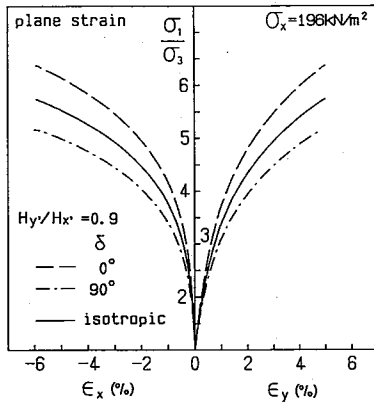


図-4 平面ひずみ圧縮試験の  
応力～ひずみ関係  
( $\delta=0^\circ, 90^\circ$ )

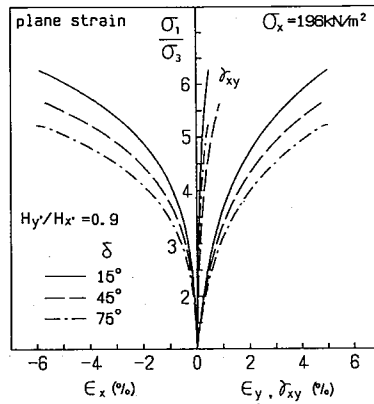


図-5 平面ひずみ圧縮試験の  
応力～ひずみ関係  
( $\delta=15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ )

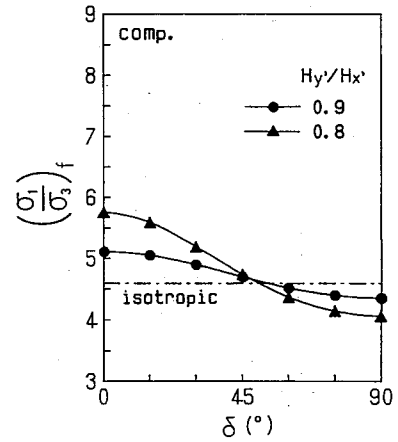


図-6 三軸圧縮試験の強度  
( $\sigma_1/\sigma_3$ )<sub>t</sub>～角度 $\delta$ 関係

の計算結果と同様に、堆積方向が最大主応力方向に一致する場合 ( $\delta=0^\circ$ )は、等方性土に比べて変形しにくく、強度は大きい。図-5は、異方性の主軸と主応力方向が一致しない場合 ( $\delta=15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ )の最大・最小主応力比  $\sigma_1/\sigma_3 (= \sigma_y/\sigma_x)$ ～ひずみ  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  関係である。異方性の主軸と応力主軸が一致しない場合は、外力的には主応力状態でも、せん断ひずみが生じると予想されるが、計算結果も同じ傾向を示している。

### 3) 強度特性

図-6は、三軸圧縮試験での強度(最大・最小主応力比  $(\sigma_1/\sigma_3)_t$ )～角度 $\delta$ 関係であり、図-7は平面ひずみ圧縮試験での同関係である。両図より、堆積方向と最大主応力方向のなす角度 $\delta$ が小さいほど強度は大きくなっており、角度 $\delta=90^\circ$ の時に最小値をとる。特に、平面ひずみ圧縮試験では、堆積面と主働すべり面 ( $45^\circ + \phi_r/2, \phi_r$ ; 内部摩擦角)が一致する場合に、最小強度になるという実験結果<sup>1)</sup>が報告されている。本手法のような連続体解析では、上記のような初期座標系における固有な位置(面)で極値をとるという現象を表現するのは難しい。しかし、有限変形解析で論じられている局所すべり(せん断帯)を表せれば、上記の現象を示せる可能性はある。

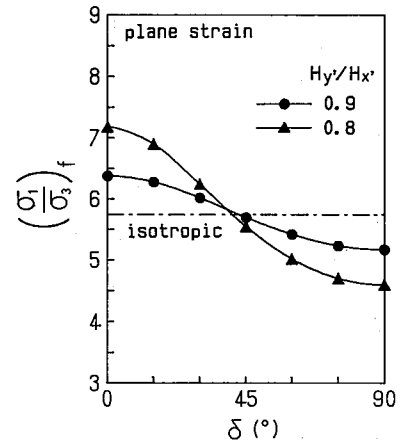


図-7 平面ひずみ圧縮試験の強度  
( $\sigma_1/\sigma_3$ )<sub>t</sub>～角度 $\delta$ 関係

### 4. 構造異方性土の局所すべり

せん断帯を表現するには、応力経路の急変に対応できる応力～ひずみ関係式を用いて、有限変形(大変形)解析する必要がある。そのような構成式の1つに、“変形理論”による関係式があるが、前節のSMP\*モデルは基本的には“流れ理論”で表されているので、せん断帯の発生を表現できない。ここでは、構造異方性とせん断帯による局所すべりについて述べるため、次式の変形理論による関係式を用いる。

$$D_{ijkl} = 2G_s \left\{ \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{9G_s \sigma_{ij}' \sigma_{kl}'}{2\bar{\sigma}^2 (H_s + 3G_s)} \right\} \quad \dots (15)$$

ここに、 $\frac{1}{H_s} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s} \right)$ ,  $G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)}$ ,  $\frac{\nu_s}{E_s} = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right)$

$D_{ijkl}$ ; 応力～ひずみテンソル,  $E$ ; 弾性係数,  $\nu$ ; ポアソン比,  $\bar{\sigma}$ ; 相当応力  
 $\sigma_{ij}'$ ; 偏差応力テンソル,  $E_t, E_s$ ; 相当応力～相当ひずみ曲線の接線勾配, 割線勾配

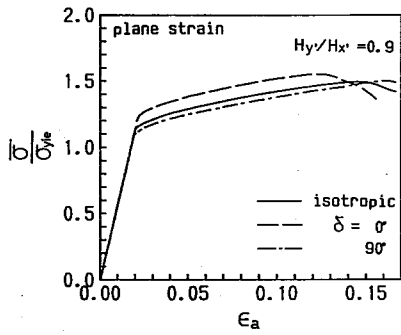


図-8 正規化軸応力～軸ひずみ関係 (等方性土、角度  $\delta = 0, 90^\circ$ )

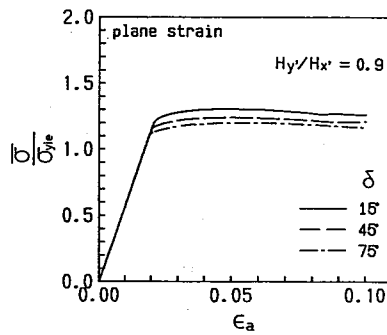


図-9 正規化軸応力～軸ひずみ関係 (角度  $\delta = 15, 45, 75^\circ$ )

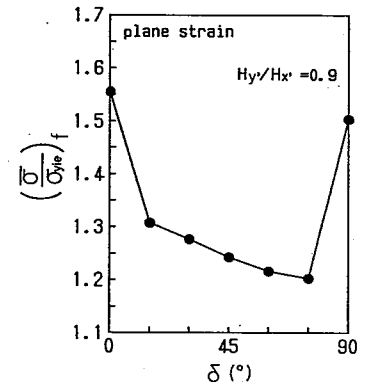


図-10 ピーク強度～角度  $\delta$  関係

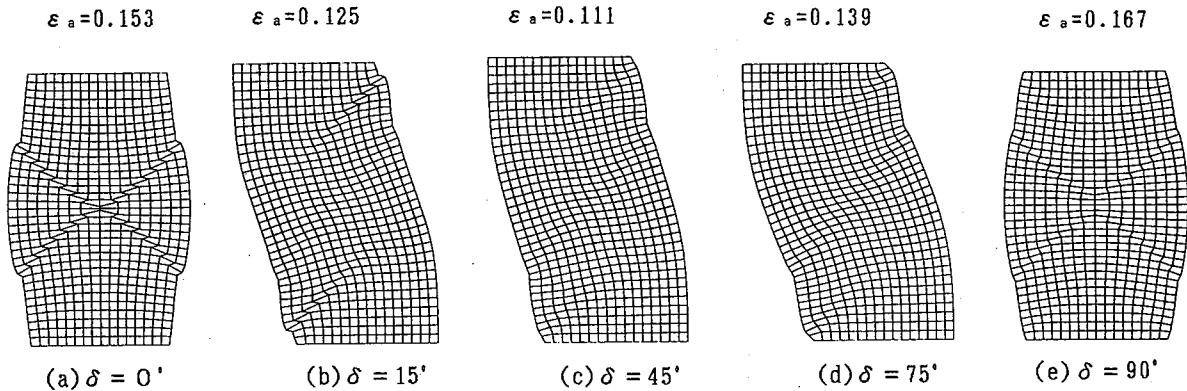


図-11 要素変形図 (せん断帯発生後)

単軸試験の相当応力  $\bar{\sigma}$  ～ 相当ひずみ  $\bar{\epsilon}$  関係として、次の n 乗式を用いる。

$$\bar{\sigma} = \sigma_{yie} \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_{yie}} \right)^n \dots \dots \dots (16)$$

ここに、 $\sigma_{yie}$ ; 降伏応力,  $\epsilon_{yie}$ ; 降伏ひずみ

式(16)は、Mises体の変形理論式であるので、土特有の摩擦則やダイランシーは表現できない。本文では、真応力 (Euler応力) の共回転応力速度 (Jaumman速度) と真ひずみ速度に対して、応力～ひずみ関係式を用い、要素形状は各時刻毎に更新(updated Lagrange法)する<sup>11)</sup>。要素タイプは定ひずみ3角形要素を4個合わせた4角形要素を用いた。材料パラメータは、 $\sigma_{yie}/E=0.02$ ,  $\nu=0.3$ ,  $n=0.0625$ 、初期応力は0として計算する。ここでは、軸直交異方性土 ( $H_y'/H_x'=0.9$ ) の平面ひずみ圧縮試験を解析するが、供試体の縦横比=2.25とする。境界条件は、上下端面の相対水平変位を拘束し、上端面を鉛直方向に強制変位させる。図-8, 9は正規化軸応力  $\bar{\sigma}/\sigma_{yie}$  ～ 軸ひずみ  $\epsilon_a$  関係である。ここに、 $\bar{\sigma}$  は上下端面の平均軸応力である。これらのピーク値と角度  $\delta$  (異方性主軸と外応力主軸のなす角,  $\delta=0^\circ$  は堆積方向と軸応力方向が一致する) の関係を図-10に示す。図より、 $\delta=75^\circ$  付近で最小値が生じている。前節の要素試験の強度は、 $\delta=90^\circ$  で最小であったが、せん断帯を考慮すると、異方性主軸と軸応力方向が一致しない場合の強度は、両主軸が一致する場合に比べてかなり小さい。両主軸が一致しない場合の仮想応力は、せん断応力  $\bar{\sigma}_{xy}$  が大きく表現されるために、せん断帯が生じやすいと考えられる。図-11は各試験の要素変形図であるが、異方性主軸と軸応力方向のなす角度によって、せん断帯の生成状況が異なるのがわかる。 $\delta=0^\circ, 90^\circ$  は異方性主軸と軸応力方向が一致するので上下左右対称であるが、それ以外は対角対称である。

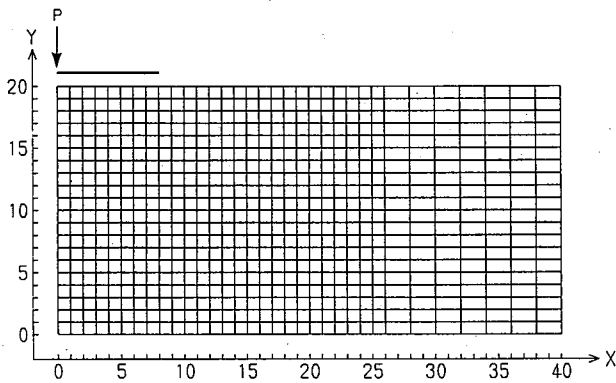


図-12 解析モデル図

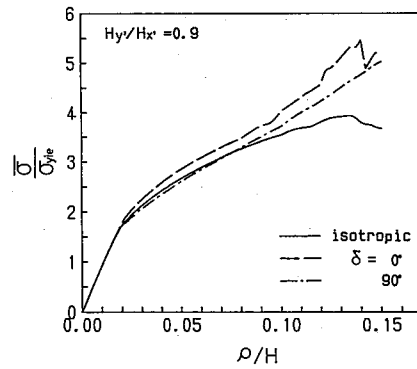


図-13 正規化荷重～沈下関係

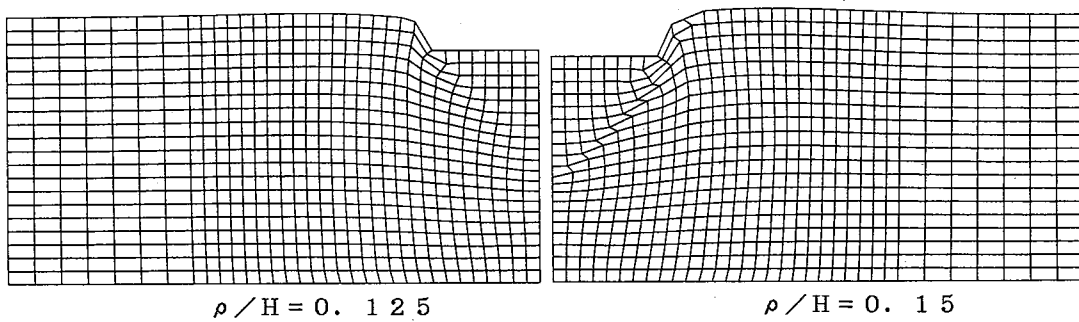


図-14 等方性地盤の要素変形図

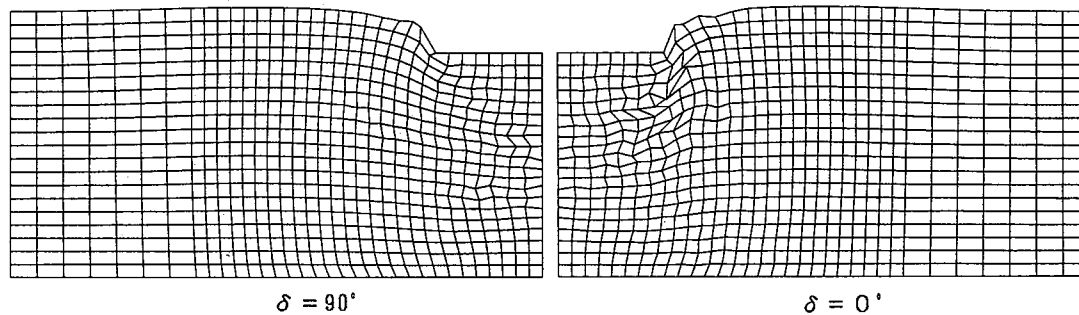


図-15 異方性地盤の要素変形図 (沈下ひずみ \$\rho/H = 0.15\$)

### 5. 構造異方性地盤の応力・変形解析

ここでは、前節の応力～ひずみ関係式を用いて、モデル地盤の応力・変形解析を行う。図-12は解析モデル図で、地下水はなく（排水状態）、初期応力は0として計算する。ここでは、等方性土および堆積角度 $\delta = 0^\circ, 90^\circ$ の異方性土（ $H_y'/H_x' = 0.9$ ）地盤を解析するので対称性を考慮して、半断面で計算する。荷重は剛基礎載荷とし、基礎底面と地盤の接触面は剛結されているものとする。剛基礎の水平変位は拘束し、鉛直方向に均等に強制変位を与える。底面は水平および鉛直変位を、両側面は水平変位を拘束する。

図-13は正規化荷重 $\bar{\sigma}/\sigma_{vi}$ ～沈下ひずみ $\rho/H$ 関係である。ここに、 $\bar{\sigma}$ は平均接地圧、 $\rho$ は沈下量、 $H$ は地盤深さである。図より、等方性地盤では、支持力（曲線のピーク値）が表れているが、異方性地盤ではピーク値が見られない。ただ、 $\delta = 0^\circ$ （図中の破線）では、一度荷重が落ちて、その後増加している。これは、局部的にせん断帯が発生して、応力が再配分されたものと考えられるが、 $\delta = 90^\circ$ （図中の一点鎖線）では荷重は単調増加している。

図-14は等方性地盤の変形図である。左半図は沈下ひずみ $\rho/H=0.125$ 、右半図は $\rho/H=0.15$ であるが、基礎端部より地盤中心部に向かってせん断帯が発生しているのがわかる。

図-15は異方性地盤の変形図である。左半図は角度 $\delta=90^\circ$ 、右半図は $\delta=0^\circ$ で、沈下ひずみ $\rho/H=0.15$ の時の変形状態である。 $\delta=0^\circ$ の場合は、基礎レベルとほぼ平行にせん断帯が生じているのが見られるが、 $\delta=90^\circ$ の場合には明瞭なせん断帯が見られない。このことは、荷重～沈下曲線の極値の有無に対応している。

ここでは、MISES 体の変形理論式を用いて計算したが、本文の解析手法は応力～ひずみ関係式を限定していないので、客観性を満足する全ての構成式に適用できる。

## 6. 注意点

異方性テンソルは、回転移動および応力状態によりその成分（たとえば、主値）が変化する。本文では、回転による異方性テンソルの変化 $H_{ij}$ を構成式の中に組込んだ式を示した。本手法では、応力状態による異方性テンソルの変化を直接に構成式に取り入れることはできない。この場合、ある時刻 $t$ の応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ から、次時刻 $t+\Delta t$ の異方性テンソル $H_{ij}$ を計算することになる。

$$H_{ij,t+\Delta t} = H_{ij,t} + \frac{\partial H_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \Delta t \quad \dots \dots \dots (13)$$

しかし、上式の偏微関数 $\partial H_{ij} / \partial \sigma_{kl}$ を定めるのは容易ではない。

本手法の特徴は、偶応力を導入して応力テンソルの対称性と変形の客観性を保証している点にある。ひずみテンソルに仮想応力テンソルの対称成分を対応させるということは、要素は回転しないと仮定しているから、異方性テンソルが回転移動で変化しないならば、偶応力を導入する必要はない。逆に言えば、仮想応力テンソルの対称成分のみで構成式を表す場合、回転移動に伴う異方性テンソルの変化は考慮できないことを意味している。

構造異方性を考慮する方法に、塑性ポテンシャルを歪ませる方法があるが、この場合にも異方性テンソルを用いて塑性ポテンシャルを修正できる（たとえば、文献10）。しかし、この場合、塑性ポテンシャルをどのような応力成分で偏微分して、塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ を計算するかについては、注意する必要がある。たとえば、実応力テンソル $\sigma_{ij}$ で偏微分すると、要素の回転移動は表せない。また、実応力で表されるテンソル（たとえば、偏差応力テンソルなど）を異方性テンソルにより修正する場合に、対称性を仮定してベクトルに異方性テンソルを作用させている場合がある<sup>10)</sup>。すなわち、3次元問題では、元来9次元テンソルでなければならないのに、6次元テンソルで表されている場合には、要素の回転移動を無視しているのである。その意味では、有名なHillの異方性を考慮した塑性モデル<sup>11)</sup>も同様である。

## 参考文献

- 1) Oda, M. and I. Koishikawa & T. Higuchi (1978): S & F, Vol. 18, No. 1, pp. 25-38
- 2) Arthur, J. R. F. & B. K. Menzies (1972): Geotechnique, Vol. 22, No. 1, pp. 115-129
- 3) Yamada, Y. & K. Ishihara (1979): S & F, Vol. 19, No. 2, pp. 79-94
- 4) 佐武正雄 (1984): 土と基礎, Vol. 32, No. 11, pp. 5-12
- 5) 大横正紀 (1982): 第37回土木学会年次講演会, 第3部門, pp. 193-194
- 6) 石崎仁・松岡元 (1980): 第35回土木学会年次講演会, 第3部門, pp. 1-2
- 7) 松岡元・平尾淳一・福武毅芳 (1984): 土と基礎, Vol. 32, No. 11, pp. 31-36
- 8) 中井照夫・船田智巳 (1991): (社)土質工学会, 三軸試験方法に関するシンポジウム, pp. 237-244
- 9) Nakai, T. & H. Matsuoka (1983): S & F, Vol. 23, No. 2, pp. 26-42
- 10) 小田匡寛・中山秀雄 (1987): 第22回土質工学研究発表会, pp. 299-302
- 11) 山田嘉昭 (1980): 培風館, 有限要素法の基礎と応用シリーズ No. 6, 「塑性・粘弾性」