

## 1. まえがき

地盤材料の物性値を、与えられた観測データから逆に推定する同定解析手法として、これまでに数多くの解析法が提案されている(例えば Gioda 1985, Gioda and Sakurai 1987, 村上 1989)。

本研究は、線形弾性問題の範囲内で、あらためて逆解析を考え、その構造を明らかにするとともに、あらたに同定解析の一手法を提案するものである。まず、静弾性問題の順解析に対して解くべき方程式系について整理し、そこからあらためて逆解析を考察する。さらに、境界条件と双対な観測境界条件を導入した同定解析の一手法を提案し、提案手法の定式化を示す。提案手法は、有限要素法の剛性方程式あるいは境界要素法の係数方程式と観測条件式に対して Newton 法を適用し、最小二乗法を用いて線形連立方程式を繰り返し解くという手法で、簡潔なアルゴリズムで問題を取り扱うことができる。

解析例として最初に簡単な均一岩盤を取り上げ、提案する手法による解析結果と、従来の逆定式化法ならびに直接定式化法による結果との比較検討を行う。さらに、物性の異なる領域からなる非均質岩盤の掘削問題および境界要素法を用いた数値計算例により本手法の有効性を検討する。

## 2. 双対境界条件と逆解析

静的な変位場における順解析は、微分方程式系から見るとつりあい方程式(支配方程式)を与えられた構成則および境界条件の下で解くことに帰着される。すなわち

$$\text{(支配方程式)} : \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{領域}\Omega\text{内で} \quad (1)$$

$$\text{(構成則: Hooke 則)} : \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2)$$

$$\text{(境界条件)} : \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{境界}\partial\Omega_u\text{上で(変位境界条件)} \quad (3)$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{境界}\partial\Omega_t\text{上で(荷重境界条件)} \quad (4)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$  は応力テンソル、 $\mathbf{u}$  は変位ベクトル、 $\mathbf{t}$  は表面力ベクトルであり、 $\mathbf{n}$  は境界  $\partial\Omega$  上の外向き単位法線ベクトルである。 $\mathbf{D}$  は弾性係数テンソルであり、等方性の線形弾性体に対してはヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  から構成される。ただし、ここでは物体力の項は無視しており、ひずみ  $\boldsymbol{\epsilon}$  は  $\boldsymbol{\epsilon} = (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)/2$  で与えられる。

有限要素法(変位法)による順解析では、つりあい方程式系(1), (2), (3), (4)に対する弱形式あるいは仮想仕事式に対して領域および境界の離散化を施すことによって、最終的に節点変位に関する

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (5)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv, \quad \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} dS$$

“Parameter Identification for Unhomogeneous Elastic Materials”

T.OHKAMI : Department of Architecture and Civil Engineering, Shinshu University

Y.ICHIKAWA : Department of Geotechnical Engineering, Nagoya University

の形の代数方程式(剛性方程式)を解くことになる。ここに、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{B}$ は、それぞれ形状関数マトリックス、変位・ひずみ関係マトリックスであり、 $\mathbf{U}$ は離散化した節点変位である。

一方、材料パラメーターを推定する同定問題においては、境界 $\partial\Omega_t$ 上で荷重 $\hat{\mathbf{t}}$ を与えて変位 $\hat{\mathbf{u}}$ が測定されるか、あるいは境界 $\partial\Omega_u$ 上で変位 $\hat{\mathbf{u}}$ が既知で表面力 $\hat{\mathbf{t}}$ を測定することによって、構成則(2)を満足する材料パラメーターが推定できることになる。したがって、ここで、境界条件(3)、(4)と双対な観測境界条件を次のように導入する。

$$\text{(観測境界条件)} : \mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{境界}\partial\Omega_u\text{上で}(\hat{\mathbf{t}}: \text{観測荷重}) \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{境界}\partial\Omega_t\text{上で}(\hat{\mathbf{u}}: \text{観測変位}) \quad (7)$$

上記の順問題に対する逆問題は、変位あるいは外力の一部が境界上で観測データとして得られたとき、つりあい方程式(1)、構成則(2)、境界条件(3)、(4)を満足したまま、構成則(2)の $\mathbf{D}$ を変数として変動させながら、観測境界条件(6)、(7)を満たすような領域内の材料定数を見いだす問題となる。

以上の準備のもとに、あらたに観測境界条件から領域内の材料を同定する逆解析手法を提案する。提案する逆解析手法は、境界上の変位と外力とを関係づける剛性方程式(5)および観測境界条件式(6)、(7)に対してNewton法を適用し、最小二乗法を用いて線形連立方程式を繰り返し解くという手法を採用している。ここでは、有限要素法を用いて、提案する逆解析手法の概要を示す。なお、境界要素法による場合も同様の定式化で同定解析を行うことができる。

つりあい式に対する有限要素の剛性方程式は、同定するパラメーター $E_i$ 、 $\nu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )からなるベクトル $\mathbf{P}$ に関する式として

$$\mathbf{F} = \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\mathbf{P}) \mathbf{B} dv \right) \mathbf{U} = \mathbf{K}(\mathbf{P}) \mathbf{U} \quad (8)$$

のように表現できる。ただし、式(8)はこの段階では既に変位境界条件の処理を行なった後の縮約された形であることを注意する。なお、 $m$ は異なる物性値の数である。

観測境界条件は、有限要素の節点値として

$$\mathbf{S}_u \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{S}_t \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{N}^t \hat{\mathbf{t}} dS = \bar{\mathbf{F}} \quad (9)$$

と表される。ここで $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{F}}$ は該当する節点の測定データであり、 $\mathbf{S}_u$ と $\mathbf{S}_t$ は、それぞれ変位および荷重の測定データに対応する節点変位、節点荷重をセレクトするマトリックスで、該当する対角項が1で他はすべて0の要素から構成される。材料パラメーター $\mathbf{P}$ を決定するために式(8)、(9)に対してNewtonのiteration schemeを適用すると、 $k$ 回目の計算ステップに対してそれぞれ

$$-d\mathbf{F}^k + \mathbf{K}(\mathbf{P}^k) d\mathbf{U}^k + \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{P}} \right)^k d\mathbf{P}^k \mathbf{U}^k = [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}]^k \quad (10)$$

$$\mathbf{S}_u d\mathbf{U}^k = [\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u \mathbf{U}]^k = \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u \mathbf{U}^k \quad (11)$$

$$\mathbf{S}_t d\mathbf{F}^k = [\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t \mathbf{F}]^k = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t \mathbf{F}^k \quad (12)$$

となる。ここに

$$d\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k, \quad d\mathbf{F}^k = \mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k, \quad d\mathbf{P}^k = \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \quad (13)$$

である。なお、上式の $\mathbf{K}$ の偏微分要素 $\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{P}$ は、線形弾性問題の場合には数値微分を必要とせず、容易に解析的に評価することができる。式(10)、(11)、(12)をマトリックス表示することにより、 $k$ 回目の計算ステップに対して

$$Gd\mathbf{x} = \mathbf{R} \quad (14)$$

ここに

$$G = \begin{bmatrix} K(\mathbf{P}^k) & -I & (\frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} \mathbf{U})^k \\ S_u & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & S_t & \mathbf{o} \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\mathbf{U}^k \\ d\mathbf{F}^k \\ d\mathbf{P}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k \\ \mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k \\ \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^k - K(\mathbf{P}^k)\mathbf{U}^k \\ \bar{\mathbf{U}} - S_u \mathbf{U}^k \\ \bar{\mathbf{F}} - S_t \mathbf{F}^k \end{bmatrix} \quad (15)$$

を得る。

一般には、観測データ（変位、荷重）の数は、未知量の数より多く取り得るので、式(14)は条件過多の系となるため、式(14)に対して、最小二乗法を適用して誤差関数  $E = (Gd\mathbf{x} - \mathbf{R}) \cdot (Gd\mathbf{x} - \mathbf{R})/2$  を定義し、条件  $\delta E = 0$  より得られる正規方程式

$$G^T G d\mathbf{x} = G^T \mathbf{R} \quad (16)$$

を繰り返し解くことによって材料の物性値が同定される。ここではさらに計算の収束性を高めるために、まず、材料パラメータに対する制約条件  $E > 0$ ,  $0 < \nu < 0.5$  を入れた形で同定パラメータ  $\mathbf{P}$  の関数として

$$W(\mathbf{P}) = \frac{1-\omega}{2} (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \cdot (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) + \frac{\omega}{2} (\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}) \cdot (\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}) - \frac{1}{\varepsilon} E^- - \frac{1}{\varepsilon} \nu^- + \frac{1}{\varepsilon} (\nu - 0.5)^+ \quad (17)$$

を定義する。ここに、 $\omega$  は  $0 \leq \omega \leq 1$  を満たす定数であり、観測境界条件が変位観測だけの場合には  $\omega = 0$ 、荷重観測だけの場合には  $\omega = 1$  となる。また、 $\varepsilon$  はペナルティ定数  $0 < \varepsilon \ll 1$  であり、

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{if } a > 0 \\ 0 & \text{if } a < 0 \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0 & \text{if } a > 0 \\ a & \text{if } a < 0 \end{cases} \quad (18)$$

である。続いて、式(16)から得られる  $d\mathbf{P}^k$  に対して勾配  $\alpha_i^k = dP_i^k/P_i^k$  の方向に沿って、式(17)の  $W(\mathbf{P})$  が  $W(\mathbf{P}^k + \lambda \alpha^k) \rightarrow \min$  となるような  $\lambda$  を一次元探索法(ジャコビ他 1976)によって求める。これより、繰り返しステップ  $(k+1)$  に対する新しい近似解が  $\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \lambda \alpha^k$  と決定される。以上、有限要素法を用いた同定解析の定式化について述べたが、境界要素法による場合も、まったく同様の解析手順で定式化することができる。

$\mathbf{P}^{k+1}$  が求まれば、この近似解に対して変位、荷重を通常の有限要素法、境界要素法等の順解析により再評価できるので、収束判定の条件を満足するまでこのステップを繰り返し、材料パラメータ  $E_i$ ,  $\nu_i$  を同定する。なお、本研究の計算例では次の収束条件を満足した時、反復計算が収束したものとしている。

$$\frac{\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|}{\|\mathbf{U}^{k+1}\|} < \varepsilon_1, \quad \frac{\|\mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k\|}{\|\mathbf{F}^{k+1}\|} < \varepsilon_2$$

$$\frac{\|\mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k\|}{\|\mathbf{P}^{k+1}\|} < \varepsilon_3, \quad \frac{|W^{k+1} - W^k|}{|W^{k+1}|} < \varepsilon_4 \quad (19)$$

ここに  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \ll 1$  はあらかじめ与えられた定数であり、 $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$  である。

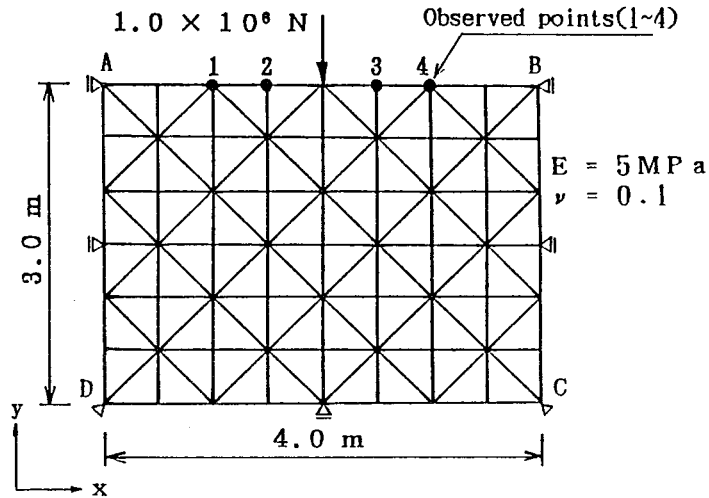


図 1: 簡単な均一岩盤モデル

表 1: 各手法による解析結果の比較 (ポアソン比を既知とした場合)

	Initial	True	Inverse form.	Direct form.	Proposed
			(Gioda)		
E(MPa)	2.0	5.0	5.000	5.000	5.000
No. of iterations			2	3	3

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.01$$

### 3. 解析例

#### 3.1 均一岩盤モデルに対する各手法の比較検討

最初に、図 1 に示すような簡単な均一岩盤モデルを対象に、同定解析法として逆定式化法の Gioda らの方法 (Cividini, Jurina and Gioda 1981, Gioda 1985), 直接定式化法による解析, 提案する手法, の異なる 3 種類の手法で同定計算を行い, それぞれの手法による材料パラメータの推定結果を比較する。なお, 1 次元探索法を用いた最適化計算は 3 つの解析手法のすべてについて行なっている。

地表面 AB が荷重境界  $\partial\Omega_t$  であり, 地表面中央に集中荷重  $10^6$  N が作用している。地表面上の 4 節点 (1 ~ 4) で次のような変位観測データ

$$\begin{aligned} u_1 = u_4 &= 3.94, & u_2 = u_3 &= 5.15 \quad (\text{cm}) \\ v_1 = v_4 &= -10.51, & v_2 = v_3 &= -18.76 \quad (\text{cm}) \end{aligned}$$

を得たものとして同定解析を行なった。ヤング率だけを同定した場合とヤング率だけでなくポアソン比についても同定計算を行った場合の各手法による推定値の結果をそれぞれ表 1, 表 2 に示す。

表 1 より, ヤング率だけについて同定計算を行う場合には, 3 種類の計算方法とも精度良い結果が得られることがわかるが, ヤング率とポアソン比を同定する場合には, 表 2 を見てわかるように, 用いる解析手法によって結果の精度に大きな差異が生じている。

ヤング率  $E$  とポアソン比  $\nu$  では, 解に与える感度に差があるために,  $E$  と  $\nu$  に対して最初から同時に同定計算を行うと発散する可能性が高い。表 2 における「直接定式化法 (1)」は計算の最初から同時に  $E$  と  $\nu$  の同定を行うものであり, 精度良い結果は得られていない。これに対して, 「直接定式化法 (2)」は, 最初は  $\nu$  の値を初期値

表 2: 各手法による解析結果の比較 (ポアソン比が未知の場合)

	Initial	True	Inverse form. (Gioda)	Direct form. (1)	Direct form. (2)	Proposed
$E(\text{MPa})$	2.0	5.0	4.077	2.268	5.056	5.000
$\nu$	0.2	0.1	0.280	0.418	0.102	0.100
No. of iterations			20	12	20	3

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.01$$

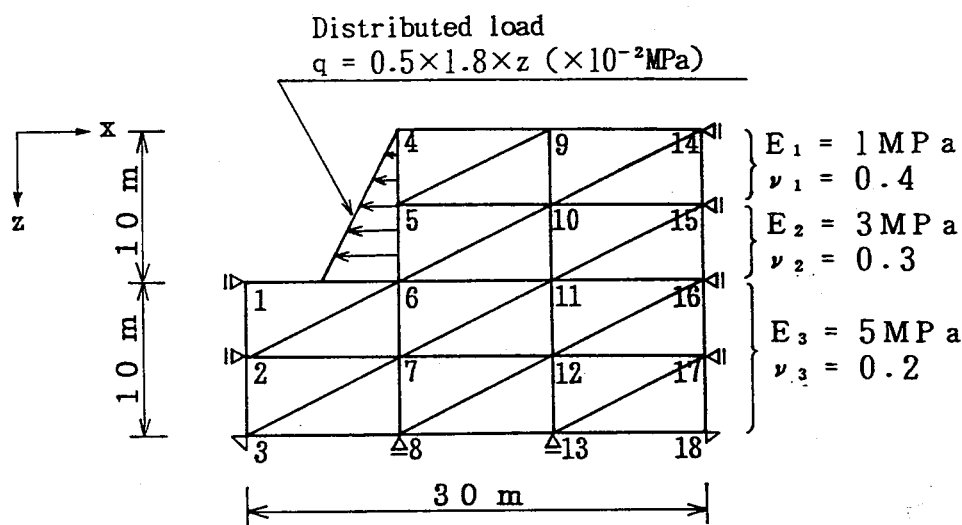


図 2: 非均質岩盤掘削問題 (Arai et al. 1983)

のまま固定しておいて  $E$  だけについて計算を行い、ある程度  $E$  の値が収束した後、あらためて  $E$  と  $\nu$  に対する同定解析の計算を行う方法であり、この場合、式 (19) に示す収束条件 ( $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1\%$ ) のすべてについては満足しなかったものの、解析結果はかなり改善されていることがわかる。なお、Gioda の方法は応力-ひずみマトリックス  $D(E, \nu)$  を体積弾性係数  $B$  とせん断弾性係数  $G$  用いて、それらの線形和として表し、 $B$  と  $G$  について同定計算を行う方法であるために、 $E$  と  $\nu$  を求める場合には上記のような考慮は適用できず、結果の精度もそれほど良くなかった。

一方、他の解析方法と比べて本手法では、 $E$  だけでなく  $\nu$  の値を同定する場合にも少ない繰り返し計算で十分精度良い結果が得られており、また、計算の途中で数値微分を必要としていないこともあり、計算機の c.p.u. time も最小であった。

### 3.2 非均質岩盤掘削問題

次に材料特性の異なる複合地盤の同定問題について考える。Arai, Ohta and Yasui (1983) は、直接定式化法による同定解析の一手法を提案しており、その中で複合地盤の掘削問題を解析している。計算モデルは図 2 に示すような 3 層構造をなす地山を掘削する問題であり、境界 4-6 に掘削による分布荷重が作用している。

Arai ら (1983) の計算と同様に、通常の順解析から得られる水平変位  $u_4, u_5, u_6, u_9$  と鉛直変位  $v_1, v_4, v_5, v_6, v_9$  を測定変位 (観測データ) として与え、物性値が異なる領域のヤング率  $E_1, E_2, E_3$ 、およびポアソン比

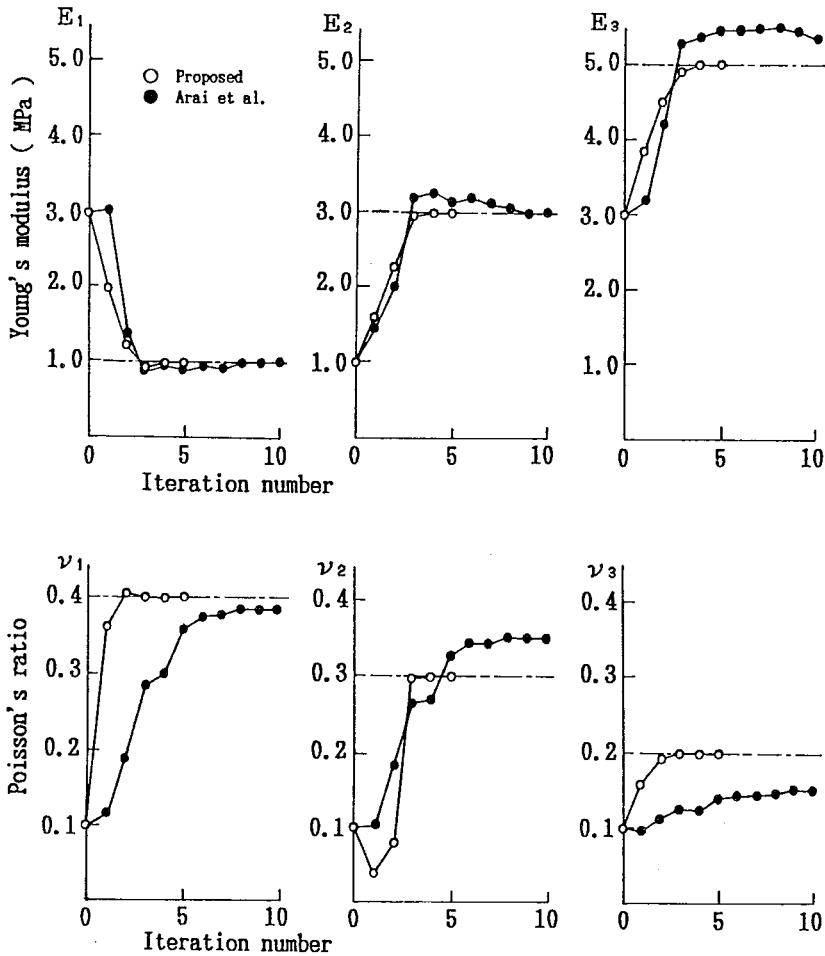


図 3: 未知パラメータの収束状況 (非均質岩盤モデル): (a) ヤング率; (b) ポアソン比

$\nu_1, \nu_2, \nu_3$  を同定する。与えた観測変位は

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= -0.014 \quad (\text{cm}) \\
 u_4 = 2.16, \quad \nu_4 &= 0.926 \quad (\text{cm}) \\
 u_5 = 1.81, \quad \nu_5 &= 0.521 \quad (\text{cm}) \\
 u_6 = 0.646, \quad \nu_6 &= 0.133 \quad (\text{cm}) \\
 u_9 = 0.959, \quad \nu_9 &= 0.344 \quad (\text{cm})
 \end{aligned}$$

である。

各未知パラメータの収束状況を図 3 および表 3 に示す。Arai らは、観測節点の位置が第 3 層から離れているために、第 3 層のヤング率  $E_3$ 、ポアソン比  $\nu_3$  が精度良く同定できないと結論づけているが、物性値が異なる複合地盤の問題においても、本手法によれば 5 回の繰り返し計算ですべての未知パラメータについて大変精度の良い解が得られていることがわかる。

### 3.3 無限領域, 半無限領域問題

無限領域あるいは半無限領域の問題を解析する場合には、境界上の離散化だけで良い境界要素法がより有効である (Brebbia, Telles and Wrobel 1984, Telles and Brebbia 1981)。境界要素法を用いた解析例としてトンネルの掘削問題 (図 4) および等分布荷重を受ける半無限地盤問題 (図 5) を考える。結果を表 4, 表 5 に示すが、ともに材料定数の初期値を正解値からかなり離れた値に設定しているにもかかわらず、かなり精度良い結果が得られている。

表 3: 非均質岩盤モデルに対する同定解析結果

	(A)Initial	(B)True	(A)/(B)	Calculated
$E_1$ (MPa)	300.0	100.0	3.00	100.00
$\nu_1$	0.1	0.4	0.25	0.40
$E_2$ (MPa)	100.0	300.0	0.33	300.00
$\nu_2$	0.1	0.3	0.33	0.30
$E_3$ (MPa)	300.0	500.0	0.60	500.00
$\nu_3$	0.1	0.2	0.50	0.20
No. of iterations	5			

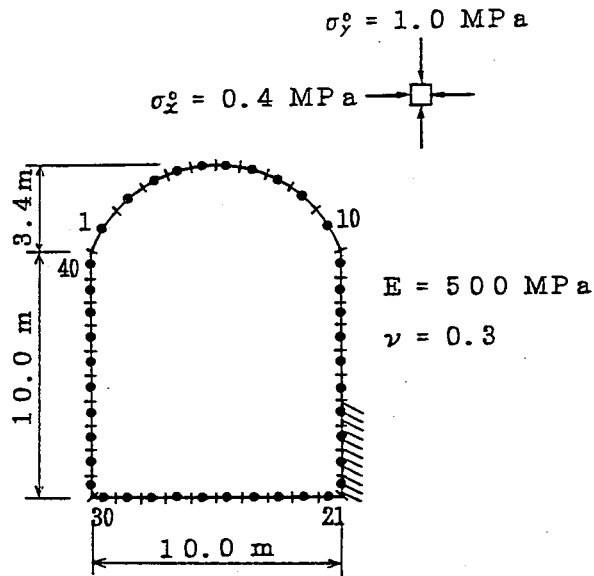


図 4: 無限領域問題

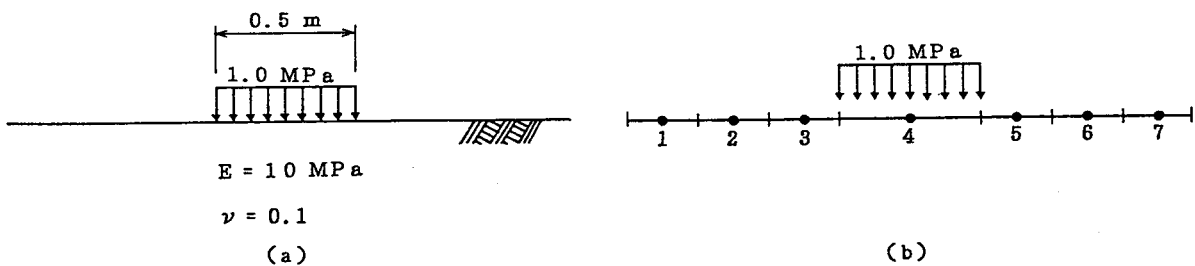


図 5: 半無限領域問題:(a) モデル図;(b) 境界要素分割図 (一定要素)

表 4: トンネル掘削問題の同定解析結果

	(A)Initial	(B)True	(A)/(B)	Calculated
$E$ (MPa)	10.0	500.0	0.02	493.56
$\nu$	0.2	0.3	0.67	0.297
No. of iterations	14			

表 5: 半無限地盤モデルの同定解析結果

	(A)Initial	(B)True	(A)/(B)	Calculated
$E(\text{MPa})$	500.0	10.0	50.0	9.725
$\nu$	0.2	0.1	2.0	0.125
No. of iterations				20

#### 4. あとがき

本研究では、線形弾性問題の枠組みの中であらためて逆解析について考察を行ない、逆解析の一般的な構造を示し、続いて観測境界において得られる計測データから逆に岩盤の材料定数を推定する同定解析の一手法を提案した。数値シミュレーションの結果、提案する手法によれば均質岩盤だけでなく複合材料からなる岩盤に対しても、少ない繰り返し計算でヤング率およびポアソン比ともに正確に同定でき、解の安定性ならびに収束性が非常に安定していることが確かめられた。

提案した同定解析の基本的考え方は、有限要素法や境界要素法等の解析手法も含め、特定の問題だけに限定されるものではなく、線形あるいは区分線形関係で表現できるものであれば、他の種々の問題に対しても、同様な定式化で容易に拡張できることが期待できる。

#### 参考文献

- K. Arai, H. Ohta and T. Yasui (1983): "Simple optimization techniques for excavating deformation moduli from field observations", *Soils and Foundations*, Vol.23, No.1, pp.108-114.
- C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel (1984): "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag.
- A. Cividini, L. Jurina and G. Gioda (1981): "Some aspects of characterization problem in geomechanics", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, Vol.18, pp.487-503.
- G. Gioda (1985): "Some remarks on back analysis and characterization problems", *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. in Geomech.*, Nagoya, Vol.1, pp.47-61.
- G. Gioda and S. Sakurai (1987): "Back analysis procedures for the interpretation of field measurements in geomechanics", *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol.11, pp.555-583.
- Y. Ichikawa and T. Ohkami(1991): "Parameter identification as a boundary control problem for linear elastic materials", paper submitted to *Soils and Foundations*.
- S. L. S. ジャコビ他著, 関根智明訳 (1976): "非線形最適化問題の反復解法", 培風館.
- 村上章 (1989): "農業土木技術者のための最新土質工学(その4)-逆解析-", 農業土木学会誌, Vol.57, No.10, pp.127-132.
- J. C. Telles and C. A. Brebbia (1981): "Boundary element solution for half-plane problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol.17, No.12, pp.1149-1158.