

圧密

土は遅れて変形する！？ 土は水で浸したスポンジと同じなの！？



名古屋大学

野田利弘

はじめに

圧密とは・・・

飽和土(間隙が水で飽和した土)からなる供試体または地盤に外力を作用させる(荷重の载荷/除荷すると、飽和土の中には過剰水圧が発生する。

このとき、外力作用(荷重载荷/除荷)に遅れて過剰水圧が消散し、その過程で飽和土が水を排出(吸入)しながら、変形(沈下)する現象

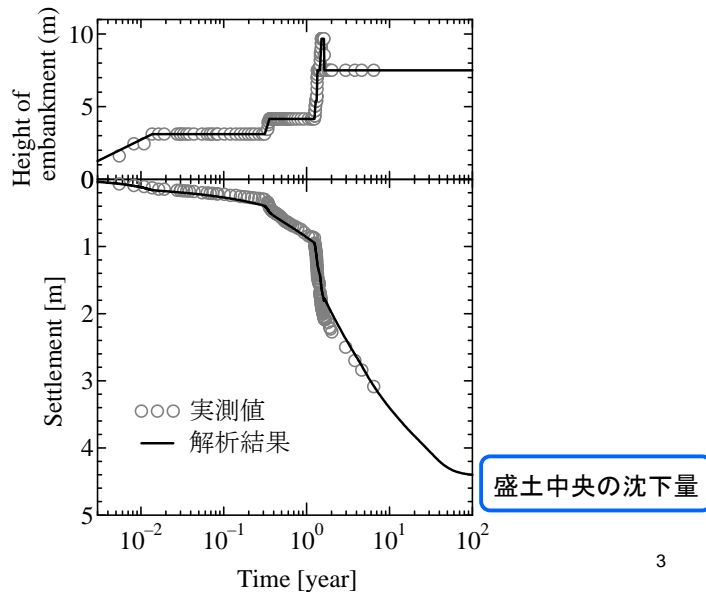
cf. 透水(浸透)の問題とどこが違うか？

透水では土は変形(圧縮)しない。「素焼き」の中の水の流れ

透水は間隙水の運動に着目。圧密は土骨格の運動に着目。

単なる「圧縮」という言葉と使い分けている。

盛土载荷に伴う圧密沈下の実際と計算例



ところで、
高校から大学1年次までに、

質点(系)の力学、剛体の力学

を学んだが、これらの力学だけで
このような土の変形挙動は理解できるであろうか？

No !

理由: 質点は(A)がないし、剛体は(A)があっても(B)しないから。

では、(B)を考慮するには、どうしたらよいか。

※ (A), (B)に適切な用語を入れよ。

まず、応力やひずみという基本概念や
それらの関係式を導入した

連続体の力学

特に固体の力学が必要。

金属、木のような材料を扱う固体力学では、

力のつり合い式(または、運動方程式)
構成式 (例: 応力~ひずみの関係式)
変位とひずみの関係(適合条件)
境界条件

を考えるから、問題を解くことができる(変形を求められる)。

これで土の変形挙動は十分理解できるのであろうか？

No! ... 何故か？

※ 連続体: 質量, 変位, エネルギー等の物理量が連続的に分布している空間領域

5

本講座の流れ

(1) 飽和土の見方・捉え方

~金属などの一相系材料と比較しながら~

(2) 一次元圧密理論の基礎方程式の誘導

(3) フーリエによる解の見どころ

(4) 一次元圧密沈下の解析

~講座ではここまで~

(5) 浅岡による沈下予測の観測的方法

(6) 地下水揚水による地盤の圧密

6

(1) 飽和土の見方・捉え方

飽和土の力学挙動を理解するためには、
これから示す(a)~(e)の事項の理解がとても大事。
まずは(a)から。

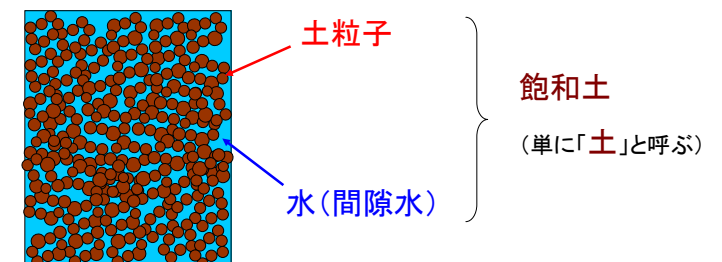
(a) **土粒子**(固相)と**水**(液相)からなる二相混合体
間隙が水で満たされた多孔質材料
cf. 金属材料は一相(固体)材料

7

金属と飽和土の違い

- 飽和土(以下で単に土)は
土粒子(固相)と水(液相)から二相混合体

飽和土の現実の姿



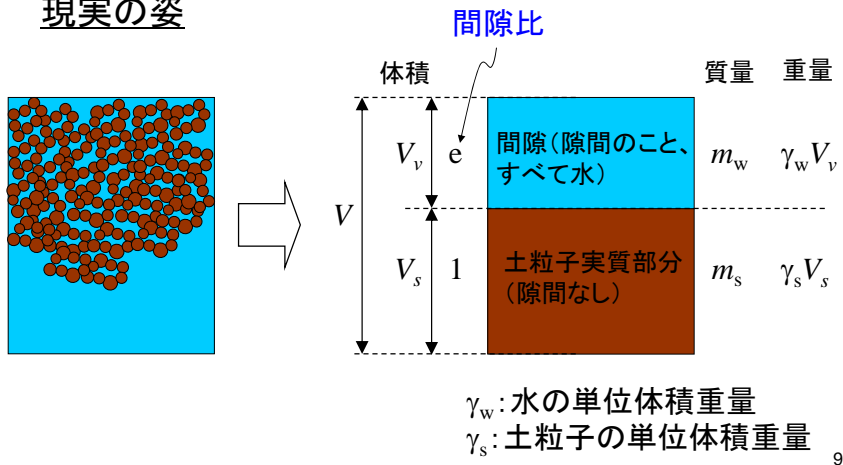
現実の土粒子は球形をしていないが。。。

8

示相図

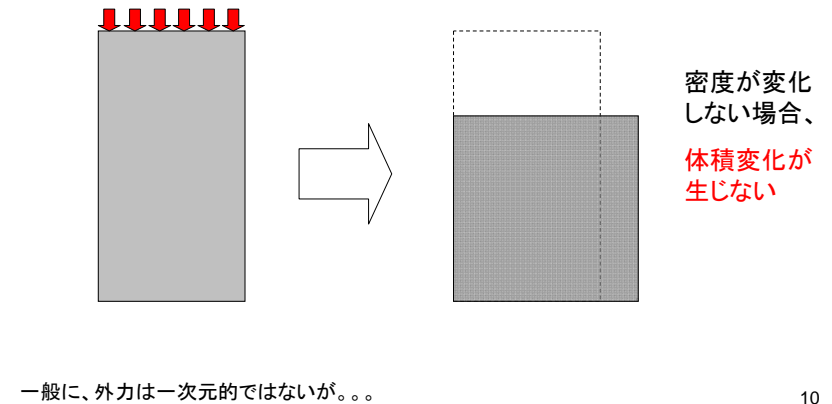
飽和土の
現実の姿

示相図



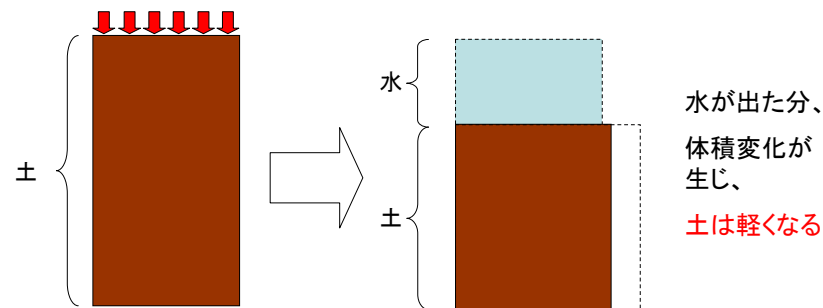
金属の場合は、荷重が作用すると、

「質量が保存される」。(重量が変わらない。)



土の場合は、荷重が作用すると、

土から水が出れば軽くなり、水が入れば重くなる。
つまり、土の「質量は変化する」。



でも、もちろん、出入りした水の質量を考慮すれば、質量は保存される。
質量が変わる(体積が変わる)土の挙動を調べる点が、
飽和土の力学らしいところ。

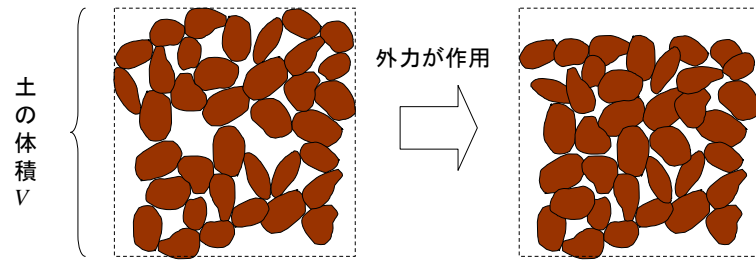
(1) 飽和土の捉え方

(b)(土木工学・地盤工学で扱うような荷重の大きさでは) 土粒子も水も「非圧縮」と考える。

「土(飽和土)」、「土粒子」、「土骨格」
という用語の意味の違いに注意しよう!!

土粒子と土骨格

- 土粒子も水も非圧縮と仮定する
- その土粒子が積み木細工のように配列して、土の体積 V を覆っている → V の中の土粒子は「土骨格」を形成する

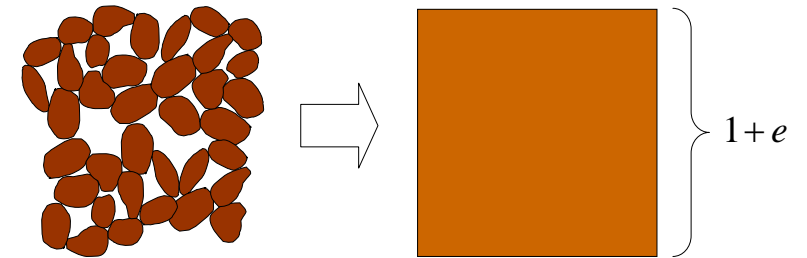


- 土が変形(圧縮)するのは土粒子の配置が変わるため
 - 土骨格の変形(圧縮)
 - その分、土から水が出入りする

13

土骨格の連続体近似

- この土骨格を「連続体」とみなして記述する (間隙に水がない場合)



示相図が示す土粒子分の体積1を土の体積 $1+e$ に引き伸ばすと、

$$\frac{\gamma_s}{1+e} = \frac{G_s}{1+e} \gamma_w$$

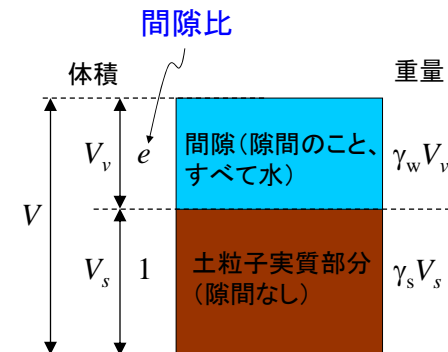
14

(1) 飽和土の捉え方

(c) 単位体積重量の2つの捉え方?がある

飽和土の単位体積重量の捉え方(その1)

- 示相図に従う方法



$$\begin{aligned} \gamma_{sat} &= \gamma_w \frac{V_v}{V} + \gamma_s \frac{V_s}{V} \\ &= \gamma_w \frac{e}{1+e} + \gamma_s \frac{1}{1+e} \end{aligned}$$

15

16

飽和土の単位体積重量の捉え方(その2)

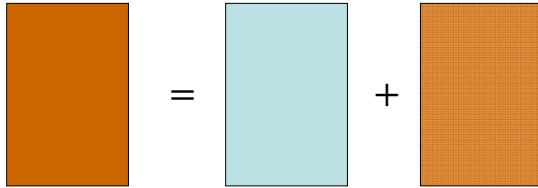
- 前式を変形して

$$\gamma_{sat} = \frac{e\gamma_w}{1+e} + \frac{\gamma_w}{1+e} + \frac{\gamma_s}{1+e} - \frac{\gamma_w}{1+e} = \gamma_w + \frac{Gs-1}{1+e}\gamma_w = \gamma_w + \gamma'$$

(Gs: 土粒子の比重)

つまり、

$$\gamma_{sat} V = \gamma_w V + \gamma' V$$

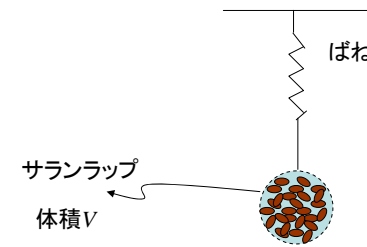


- 飽和土の重量... 土の体積Vを、全部「 γ_w (水)」が占めたときの重量と 全部「**単位体積重量 γ' の材料**」が占めたとき重量(有効重量)の和

17

飽和土の単位体積重量の捉え方(その2)

- γ' は何か?** それを理解するために、まず、飽和土の「現実の姿」をサララップをまいて重さをはかってみよう。



$$W = \gamma_{sat} V$$

γ_{sat} : 「**飽和単位体積重量**」

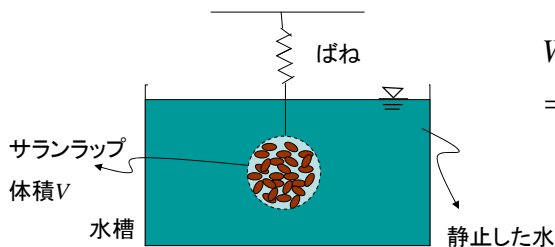
- 確かに、飽和土の重量が作用している。

次に、水につけて重さをはかってみよう！！

18

飽和土の単位体積重量の捉え方(その2)

- (**γ' は何か?**) 今度は、浮力が働くから、



$$W' = \gamma_{sat} V - \gamma_w V$$

$$= \gamma' V$$

γ' : 「**水中単位体積重量**」

- 飽和土の重量... 土の体積Vを全部「 γ_w (水)」が占めたときの重量と全部「**水中単位体積重量 γ' の土骨格**」が占めたとき重量(有効重量)の和

→ γ' を有効単位体積重量とも呼ぶ。

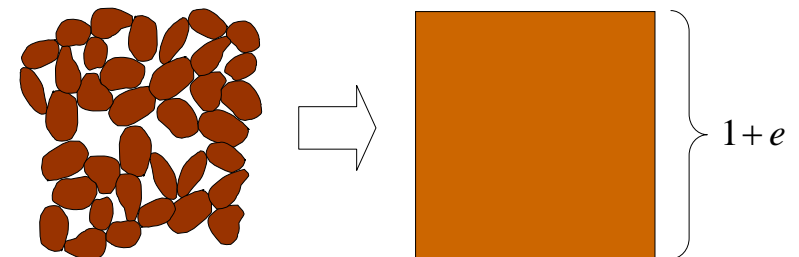
→ 飽和土内の同じ点を γ_w の水と γ' の土骨格が共有している。

次に、この γ' を別の言い方で説明するために、あらためて

19

土骨格の連続体近似 (p.12再掲)

- この土骨格を「**連続体**」とみなして記述する (間隙に水がない場合)



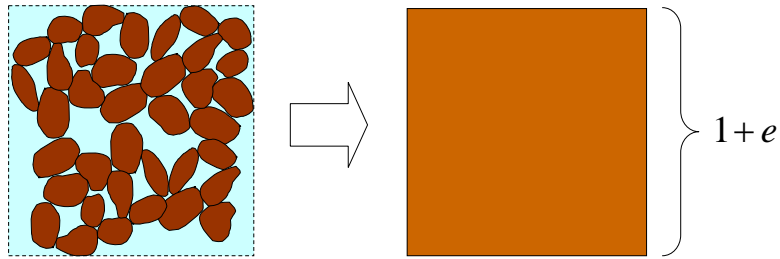
示相図が示す土粒子分の体積1を土の体積 $1+e$ に引き伸ばすと、

$$\frac{\gamma_s}{1+e} = \frac{Gs}{1+e}\gamma_w$$

20

土骨格の連続体近似

- 水が入ると



土粒子に作用する浮力を除いた
単位体積重量 $\gamma_s - \gamma_w$

示相図が示す土粒子分の体積1を
土の体積1+eに引き伸ばすと、

$$\frac{\gamma_s - \gamma_w}{1+e} = \frac{Gs - 1}{1+e} \gamma_w = \gamma'$$

21

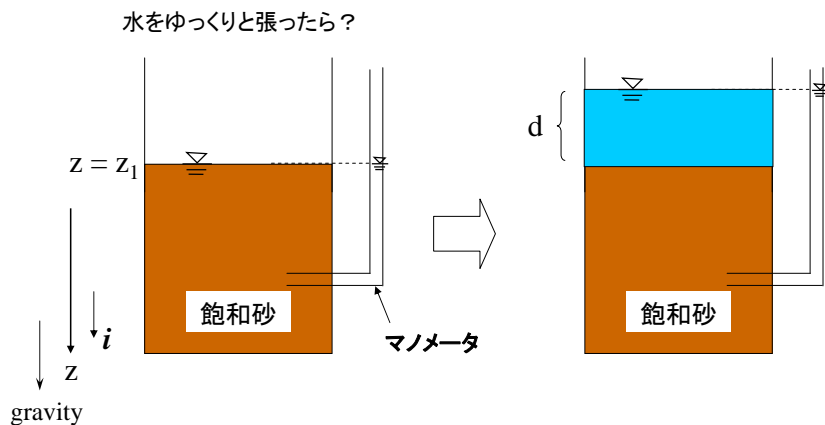
(1) 飽和土の捉え方

(d)有効応力の原理

cf. 鉄筋コンクリート部材のような断面力の考え方と異なる。
→「単位体積重量の捉え方(その2)」で見てきた!?

22

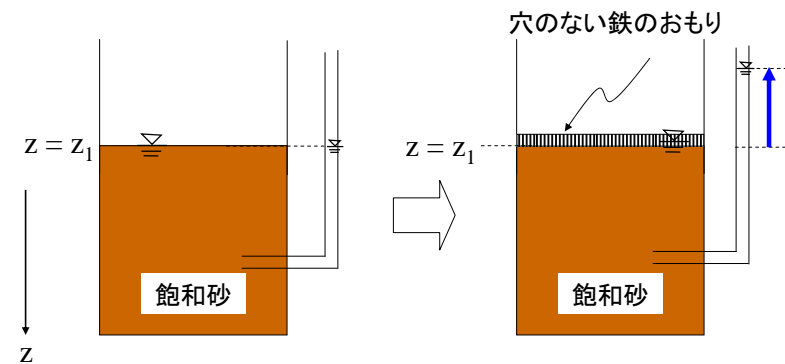
有効応力の原理(思考実験1)



※ マノメータ: 圧力(水圧)を高さと測る装置

23

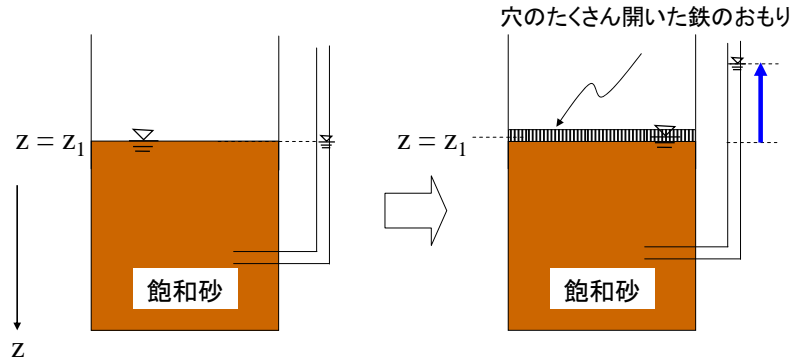
有効応力の原理(思考実験2)



- 土は変形することなく、水圧がおもりの重さの分上昇するだけ
- 水が出ないという束縛がなければ圧縮できたが、その束縛があるため、土骨格が受け持つかわりに、水が「束縛力」として受け持つ

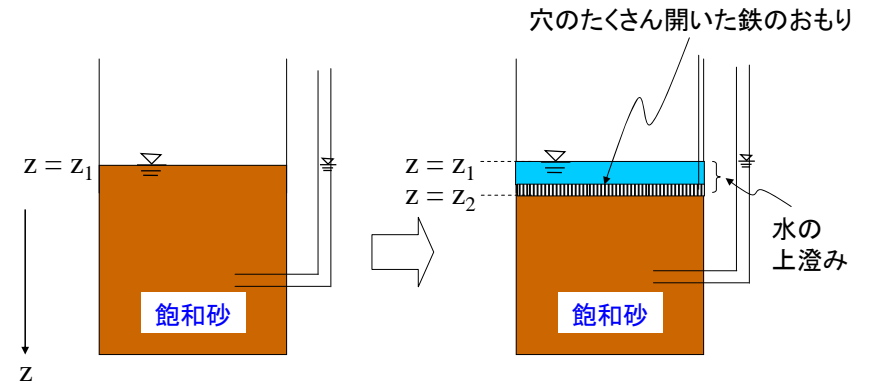
24

有効応力の原理(思考実験3)



- 水が出ないくらい早く「瞬間載荷」をしたら、「思考実験2」と同じで、水圧がおもりの重さの分上昇するだけ
- その後、十分時間が経つと・・・

有効応力の原理(思考実験3)



透水性が低い粘土でも同じ！

有効応力原理(一次元の場合)

$$\sigma = \sigma' + u_w$$

(全)応力 有効応力 間隙水圧(中立応力)

(土の変形に有効な応力) (土の変形に中立な応力)

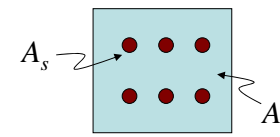
飽和土の中の同じ点を水と土骨格が占めるとして、(全)応力を分担している。

なお、間隙水圧 u_w は次式のように、(初期)静水圧 u_{s0} と過剰水圧 u_e の和で表すといろいろと便利なことが多い。

$$u_w = u_{s0} + u_e$$

また、この原理の適用によって、一相系の問題と比べ、場の未知数が一つ増えた。

ちなみに、RC部材では・・・



A_s :鉄筋の総断面積
 A_c :コンクリートの総断面積
 $A = A_s + A_c$:総断面積

σ_s :鉄筋の圧縮応力 σ_c :コンクリートの圧縮応力

- この断面に作用する断面力を P とすると、応力 σ は、

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\sigma_c A_c + \sigma_s A_s}{A} = \sigma_c \frac{A_c}{A} + \sigma_s \frac{A_s}{A}$$

となり、対象としている断面の大きさ(面積)が関係する

(1) 飽和土の捉え方

(e) 土中あるいは土中へ出入りするときに
水の流れはダルシー則に従う

-水は全ヘッドが高い方から低い方へ流れる-

また、土に水が入れば、土は膨らむ。
土から水が出れば、土は縮む。

これらから、増えた場の未知数(一つ)を
「土骨格の体積変化がダルシー則に制御される」
という関係式(一つ)で補う。

29

(1) 飽和土の捉え方の「まとめ」

- 金属でも飽和土でも変形・運動を調べるときには、(静的の場合)力のつりあい式を解く。
- 液相と固相からなる飽和土の場合は、さらに土の体積変化を考慮しながら、力のつりあい式を解く。
- 土骨格と水が同じ点に存在するとして調べる。
- 有効応力の原理の適用によって、場の未知数が増える。
- これは、「土骨格の体積変化がダルシー則に制御される」という式を用いることによって補う。

30

圧密問題の基礎方程式 (水～土骨格の連成問題の基礎方程式)

- (a)力のつりあい式
- (b)変位とひずみの関係
- (c)有効応力原理
- (d)土の構成式(有効応力とひずみの関係)
- (e-1)土骨格と水の連成式(連続式)
- (e-2)ダルシー則
- (f)境界条件
- (g)初期条件

(c),(e-1),(e-2)および(g)と、(e)で有効応力を用いる点が、(金属材料と異なる)「二相混合体」の飽和土材料らしいところ

31

(2) 一次元圧密問題の基礎方程式

土質力学の父

Karl Terzaghi

(1883.10.2-1963.10.25)

オーストリア人



「有効応力の原理」は

Terzaghiが提唱

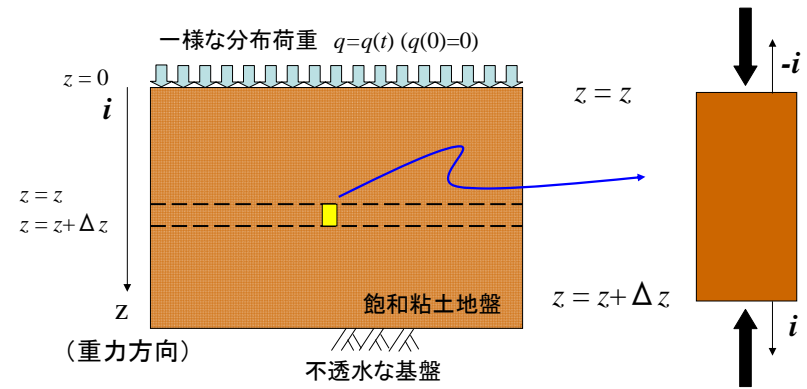
32

一次元圧密理論の諸仮定

- 土粒子は非圧縮
- 水も非圧縮
- 透水係数や土骨格の硬さなど均質一様
- 土の変形は一次元的に生じる
(鉛直荷重も一様)
- 変形は微小・・・「現実に変形(圧縮)しているが、変形(圧縮)していない」とする考え方(微小変形理論)

33

(a) 力のつりあい式

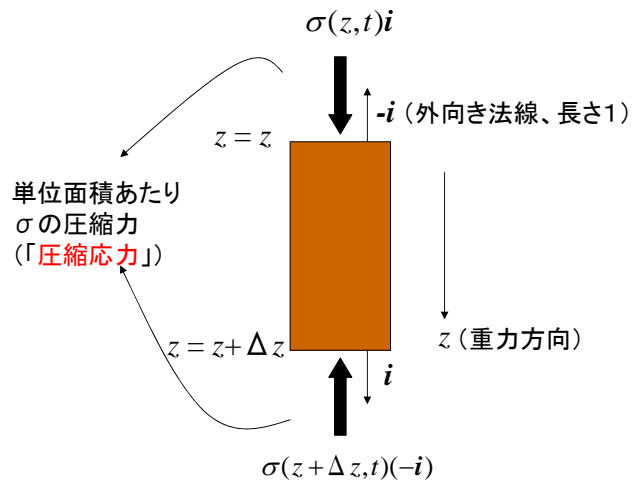


どこからごく微小な土をとってきても、その土は(加速度的に変形が生じないで)「力がつりあっている」から、その土には断面力(圧縮力)が作用している

34

• 圧縮応力の定義

土の外向き法線ベクトルと逆向きに作用する単位面積あたりの力を**圧縮応力**とする。なお、一般に σ は時間の関数でもあるから、 $\sigma = \sigma(z, t)$ と書く。



35

(土の自重を考えるとときの)力のつりあい式

- 重力方向を下向きとして、時刻 $t=t$ における $z=z$ と $z=z+\Delta z$ 間の土の力のつりあい式は、次式。

$$\sigma(z, t)\mathbf{i} + \sigma(z + \Delta z, t)(-\mathbf{i}) + \gamma_{sat}(z + \Delta z - z)\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

よって、 Δz は任意だから、

$$\frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial z} = \gamma_{sat}$$

※ 次式(Taylor展開)に注意

$$\sigma(z + \Delta z, t) = \sigma(z, t)\mathbf{i} + \frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial z} \Delta z + \dots$$

36

(b)変位とひずみの関係

- 一次元問題の場合は、境界条件 $(\sigma)_{z=0} = q(t)$ で $\sigma(0,t) = q(t)$ とし、この方程式を簡単に解くことができ、次式。

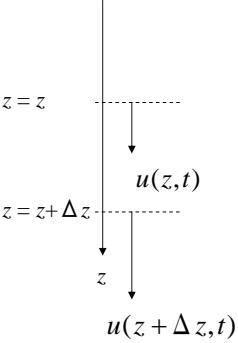
$$\sigma(z,t) = \gamma_{sat} z + q(t)$$

- さらに、微小変形の仮定によって、 γ_{sat} は時間とともに変化がないとみなせるから、次式もいえる。

$$\frac{\partial \sigma(z,t)}{\partial t} = \dot{q}(t)$$

- 適合条件とも呼ぶ
 - …マクロ(大域的)な変形とミクロ(局所的)な変形に矛盾がないこと
- ひずみについて圧縮を正にとる…ひずみの増加は変位が増加するのと逆になるので、 $\Delta z \rightarrow 0$ に対して、次式

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(z,t) \\ &= - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(z + \Delta z, t) - u(z, t)}{\Delta z} = - \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \end{aligned}$$



(c)有効応力原理

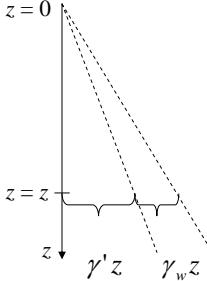
$$\sigma(z,t) = \sigma'(z,t) + u_w(z,t)$$

- 初期状態における力のつりあい式をあらためて見ると、土骨格の自重は土骨格自身が支えているから、

$$\sigma'(z, t = 0) = \gamma' z$$

$$u_w(z, t = 0) = \gamma_w z$$

が言える。



(d)土骨格の構成式(「一次元」の構成式)

～有効応力(速度)とひずみ(速度)の関係～

- フックの法則に従う線形弾性体を考える。

$$\varepsilon = m_v \sigma'$$

ここに、

$$m_v = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \quad \text{: 体積圧縮係数}$$

(E: ヤング率, ν : ポアソン比)

また、このことより、次式を仮定している。

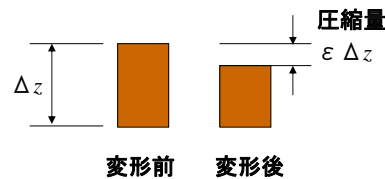
$$\varepsilon(z,0) = m_v \sigma'(z,0) = m_v \gamma' z$$

(e-1)水と土(骨格)の連続式

- 単位時間あたりの土骨格の圧縮(膨張)は、水の排出量(流入量)に等しい。

厚さ Δz の微小な土における単位時間あたりの土の圧縮量(一次元):

$$\frac{\partial(\varepsilon \Delta z)}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \Delta z$$



41

(e-1)水と土(骨格)の連続式

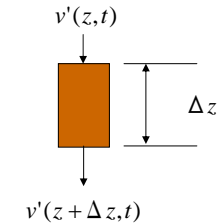
- 一方、この土から出る単位時間当たりの水の量

$$v'(z + \Delta z, t) - v'(z, t) = \frac{\partial v'(z, t)}{\partial z} \Delta z$$

ここに、 $v' = v'(z, t)$ はダルシー則に従う水の平均的な流れ

- ゆえに、水と土骨格の連続式は、

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v'}{\partial z}$$



42

(e-2)ダルシー則(水の流れ)

- ダルシー則に従う。

$$v' = -k \frac{\partial h(z, t)}{\partial z}$$

- 全ヘッド h は圧力ヘッドと位置ヘッドの和

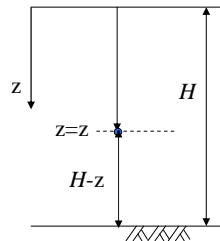
$$h(z, t) = \frac{u_w(z, t)}{\gamma_w} + (H - z)$$

- さらに水圧は静水圧と過剰間隙水圧の和

$$u_w(z, t) = u_{s0} + u_e(z, t) = \gamma_w z + u_e(z, t)$$

- よって

$$v'(z, t) = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u_e(z, t)}{\partial z}$$



43

基礎方程式のまとめ

- (荷重に関する境界条件込みの)力のつりあい式, 有効応力原理および土骨格の構成式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(z, t)}{\partial t} &= m_v \frac{\partial \sigma'(z, t)}{\partial t} = m_v \frac{\partial}{\partial t} \{ \gamma_{sat} z + q(t) - (u_{s0} + u_e(z, t)) \} \\ &= m_v \left(\frac{dq(t)}{dt} - \frac{\partial u_e(z, t)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

- 連続式とダルシー則から

$$\frac{\partial \varepsilon(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u_e(z, t)}{\partial z} \right)$$

- これらを連立して、ひずみ(速度)を消去すれば、次式。

44

Terzaghiの一次元圧密方程式

透水係数が均質なら、

$$\frac{\partial u_e(z,t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u_e(z,t)}{\partial z^2} + \frac{dq(t)}{dt} \quad 0 \leq z \leq H, t \geq 0$$

$$c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} > 0 \quad \text{: 圧密係数}$$

$q(t)$ = 一定なら、Terzaghiが1923年に導いた式

$$\frac{\partial u_e(z,t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u_e(z,t)}{\partial z^2} \quad 0 \leq z \leq H, t \geq 0$$

この偏微分方程式は熱の拡散方程式と同型(放物型)。

あとは、過剰水圧に関する境界条件と初期条件を与えて、解くだけ。

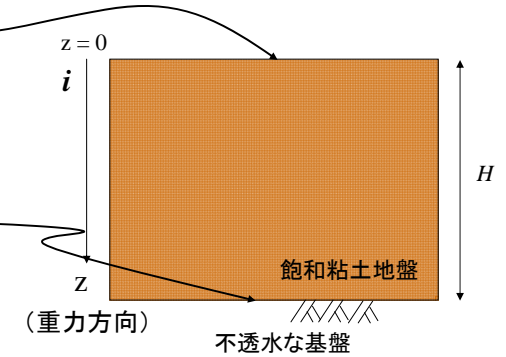
(f) 間隙水に関する境界条件

- 排水条件

$$u_e(z=0,t) = 0$$

- 非排水条件

$$\frac{\partial u_e(z=H,t)}{\partial z} = 0$$



∴

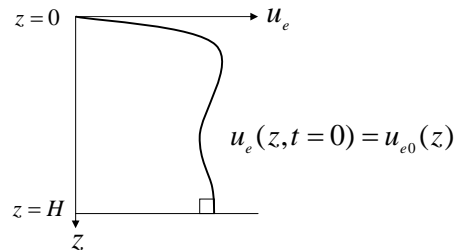
$$v'(z=H) = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u_e(z=H,t)}{\partial z} = 0$$
 ここでは、斉次な境界条件を考える。
 →理論解が得られやすい。

(g) 初期条件

- 一般に、初期条件($t=0$ 時の u_e 分布)は、

$$u_e(z=0,t=0) = 0$$

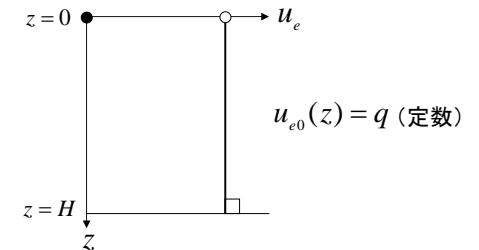
$$\frac{\partial u_e(z=H,t=0)}{\partial z} = 0$$



- 特に、次のような初期条件

$$u_e(z=0,t=0) = 0$$

$$\frac{\partial u_e(z=H,t=0)}{\partial z} = 0$$



を考慮することが多い。
 (この初期条件については後述する。)

この圧密方程式(偏微分方程式)について

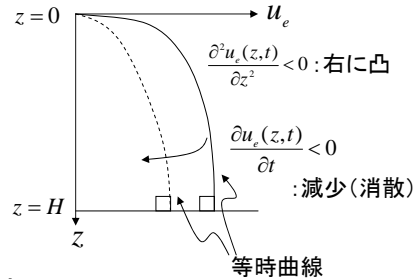
圧密係数 c_v がいつも正だから、荷重 q が一定で過剰水圧が右に凸の曲線の分布をしているときは

$$\frac{\partial^2 u_e(z,t)}{\partial z^2} < 0$$

となるので、

$$\frac{\partial u_e(z,t)}{\partial t} < 0$$

すなわち、 u_e は減少となる。つまり、この偏微分方程式は過剰水圧 u_e の「消散過程」を表す。



49

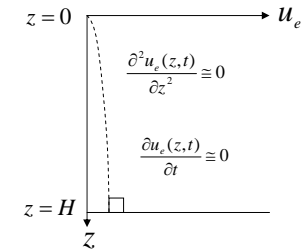
また、過剰水圧がほとんど消散した終わりの頃は、

$$\frac{\partial^2 u_e(z,t)}{\partial z^2} (< 0)$$

の値がほとんどゼロなので、

$$\frac{\partial u_e(z,t)}{\partial t} (< 0)$$

の値もほとんどゼロ。すなわち、 u_e の消散はゆっくりとなり、 $u_e=0$ になるには時間が無限に必要となる。



$$\frac{\partial u_e(z,t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u_e(z,t)}{\partial z^2}$$

50

(3) フーリエによる解の見どころ

- 変数分離法による解の求め方は別途。

51

フーリエの方法による解

前述の一般の初期条件に対して、解を次式を得る。

$$u_e(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin A_n z \exp(-A_n^2 c_v t)$$

ここに、

$$\begin{cases} A_n = \frac{2n-1}{2H} \pi \\ B_n = \int_0^{2H} u_{e0}(z) \sin A_n z dz \end{cases}$$

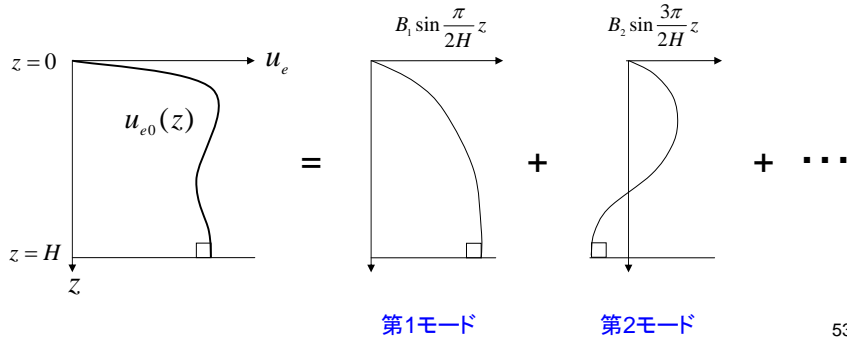
52

解の見どころ(その1)

(a) 初期($t=0$)過剰水圧分布の分解表現

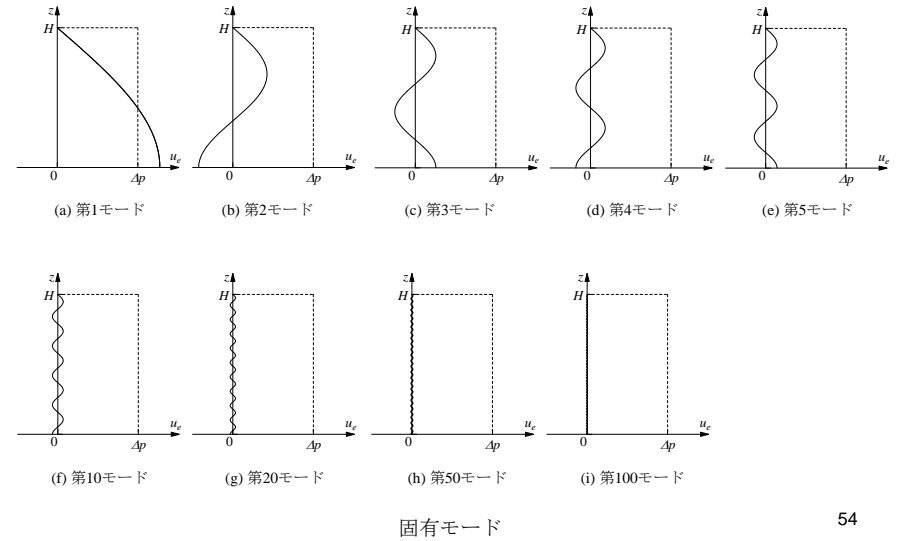
$$u_e(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin A_n z = B_1 \sin \frac{\pi}{2H} z + B_2 \sin \frac{3\pi}{2H} z + B_3 \sin \frac{5\pi}{2H} z + \dots$$

(境界条件を満足する正弦関数の級数和)

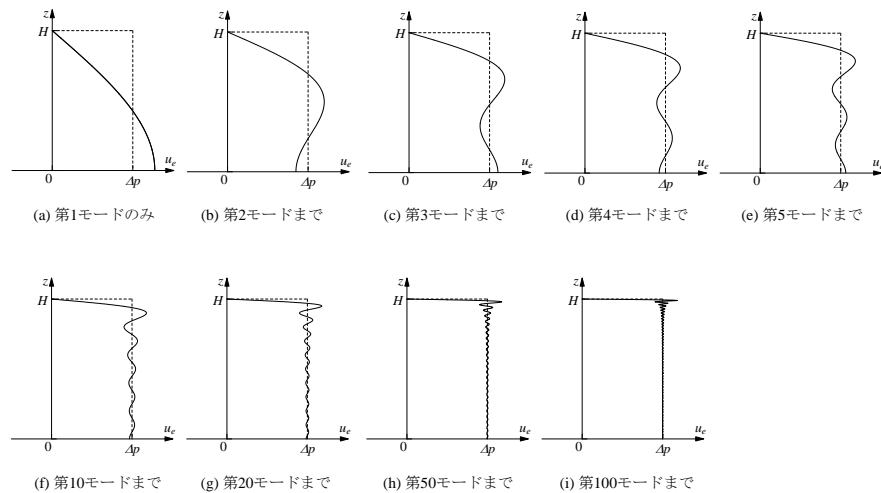


53

もし、初期の過剰水圧分布が $u_e(z,0) = \Delta p = \text{一定}$ で与えられたとすると、



54



固有モードの重ね合わせによる初期条件の表現

55

解の見どころ(その2)

(b) 各モードは独自の速さで減衰する

各モードの減衰は、

$$\exp\left\{-\left(\frac{2n-1}{2H}\right)^2 c_v t\right\}$$

で支配される。 $n=1, 2, 3$ を書いてゆくと、

$$\exp(\lambda_1 t), \exp(\lambda_2 t), \exp(\lambda_3 t)$$

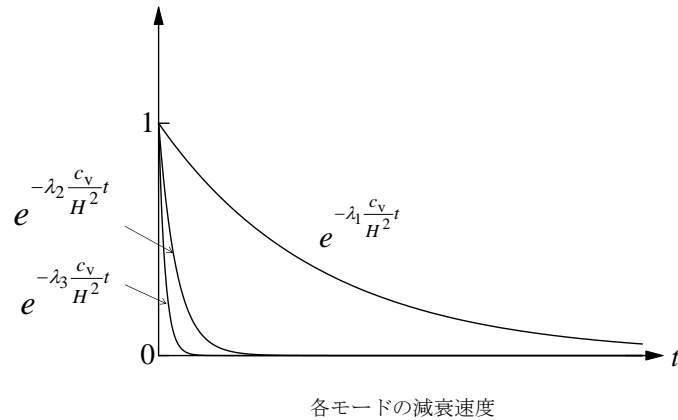
は、

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \dots = -1 : -9 : -25 : \dots$$

となり、どのモードも $t \rightarrow \infty$ で $0 \leq z \leq H$ でゼロに近づく。
このとき、**高次のモードほど極端に減衰が早い。**

56

具体的に、1次～3次までの各モードの減衰の様子を
見てみると、



57

解の見どころ(その2)

つまり、少し時間が経つと、**圧密現象は第1モードと**
 $\exp(\lambda_1 t)$ だけに支配されるようになる。

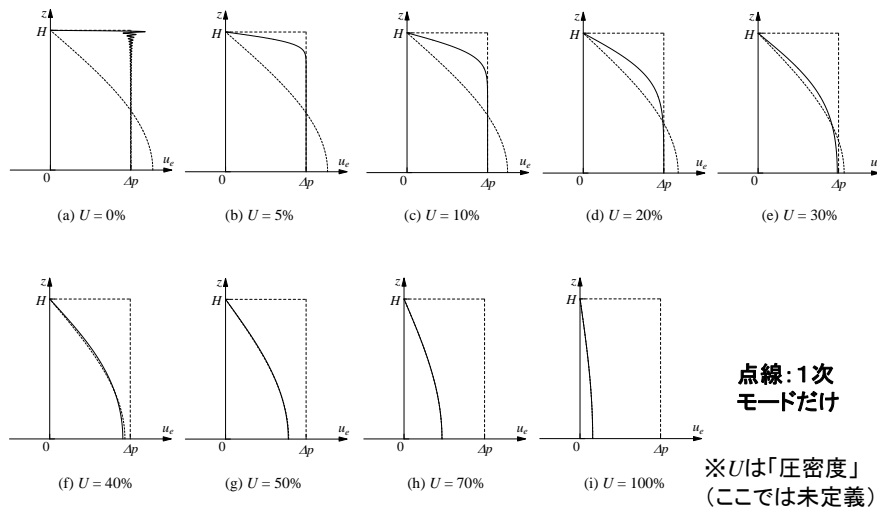
なお、

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$$

は、**負の実数**で圧密の早さを決め、「**圧密問題の固有値**」
と呼ぶ。

58

また、過剰水圧消散の様子を100次モードまで重ね合わせた解で見ると、



第1モードの減衰と第100モードまで重ね合わせた解の減衰の比較

59

(4) 一次元圧密沈下解析

(a) 沈下量:

$$\frac{\partial u_e(z, t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u_e(z, t)}{\partial z^2} \quad 0 \leq z \leq H, t \geq 0$$

から(過剰水圧だけが先に解けて)、地盤の沈下(変形)量
 $\rho(t)$ を

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \int_0^H \{\varepsilon(z, t) - \varepsilon(z, 0)\} dz = \int_0^H m_v \{q - u_e(z, t)\} dz \\ &= m_v q H - m_v \int_0^H u_e(z, t) dz \end{aligned}$$

から求めることができる。

60

(b) 圧密度:

前式で $t \rightarrow \infty$ で、 $u_e(z, t) \rightarrow 0$ だから、前式最右辺第2項が消え、最終沈下量 ρ_f は

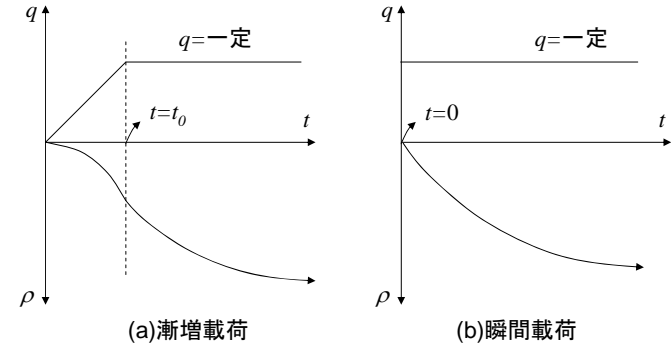
$$\rho_f = m_v q H$$

となる。(この qH は何を意味するか考えよう。)

この ρ_f で $\rho(t)$ を除したものを **圧密度** と呼び、次式となる

$$U(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_f} = 1 - \frac{1}{qH} \int_0^H u_e(z, t) dz$$

この式から $U(t)$ が荷重 q に依存するように見えるが、教科書では q に依存しないと書かれている。理由は次のスライド。



- (a)では、どこで q =一定にするか、によって「過剰水圧の初期値」に違いが見られ、荷重に依存するように見える。
- 事実、 $t=t_0$ で過剰水圧の初期値を与えるのが難しかったりして、**教科書では、(b)の瞬間荷重ばかり**が説明される。

(c) 瞬間荷重 (を吟味してみよう):

このとき、力のつり合い式から、

$$\sigma(z, 0) = \gamma_{sat} z + q$$

また、有効応力の原理から

$$\sigma(z, 0) = \sigma'(z, 0) + u_{s0}(z, 0) + u_e(z, 0)$$

でしかも、地表面での水位は変化がなく、

$$u_{s0}(z, 0) = \gamma_w z$$

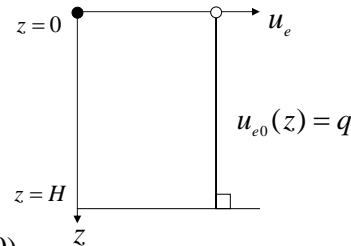
のまま、なおかつ**瞬間荷重時は土の変形がない**ので、

$$\sigma'(z, 0) = \gamma' z$$

のままだから、 $0 < z \leq H$ に対し、

$$u_e(z, 0) = q$$

が与えられる。



この条件で、圧密方程式を解けば、

$$u_e(z, t) = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{H}\right) \exp\left\{-\left(\frac{2n-1}{2} \pi\right)^2 \frac{c_v}{H^2} t\right\}$$

となり、圧密度の定義式の最右辺の第二項に代入すれば、

$$U(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_f} = 1 - \frac{1}{qH} \int_0^H u_e(z, t) dz$$

から**無事 q が消えて、圧密度が荷重によらない**ことがわかる。すなわち、

$$U(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \exp\left\{-\left(\frac{2n-1}{2} \pi\right)^2 \frac{c_v}{H^2} t\right\}$$

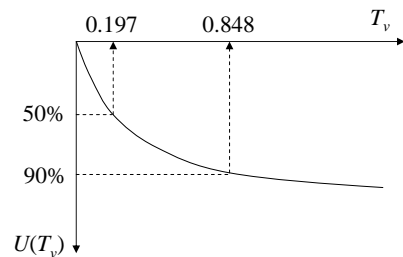
(d)時間係数:

一次元圧密の問題の場合には、

$$T_v = \frac{c_v}{H^2} t$$

なる無次元量を考え、 T_v を「時間係数」と呼ぶ。

すると、地盤の固さまたは層厚が違う(弾性)地盤があっても、同じ時間係数であるならば、圧密度と時間係数の関係は一意に決まる。



$$\begin{aligned}
 U(T_v) = 0\% &\rightarrow T_v = 0 \\
 U(T_v) = 50\% &\rightarrow T_v = 0.197 \\
 U(T_v) = 90\% &\rightarrow T_v = 0.848 \\
 U(T_v) = 100\% &\rightarrow T_v = \infty
 \end{aligned}$$

65

別の言い方をすれば、

$$T_v = \frac{c_v}{H^2} t \quad c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} \quad m_v = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$$

透水係数 k が大きいほど、
 土の固さ E が大きいほど
 「排水距離」 H が短いほど、
 同じ t でも、 T_v が大きいので、
 圧密の進捗がより早い。

66

(5) 浅岡による沈下予測の観測的方法

荷重一定時の沈下量は

$$\begin{aligned}
 \rho(t) &= \int_0^H \{\varepsilon(z,t) - \varepsilon(z,0)\} dz = m_v q H - m_v \int_0^H u_e(z,t) dz \\
 &= \rho_f - \sum_{i=1}^{\infty} M_i \exp(\lambda_i t)
 \end{aligned}$$

の形で与えられることは学んだ。ただし、 $M_i (i=1,2,\dots)$ は境界条件・初期条件から決まる定数。

さらに、**時間がある程度経つと第1モードが卓越すること**も学んだので、そのときは、

$$\rho(t) = \rho_f - M_1 \exp(\lambda_1 t)$$

から求めることができる。

67

さて、このとき(荷重放置からある程度時間が経過したとき)、**等時間間隔**で沈下量を見る。すなわち、 $t = \Delta t \cdot j$ として、

$$\rho(t) = \rho(\Delta t \cdot j) = \rho_j$$

とする。すると、 $j-1$ 番目の時刻と j 番目の時刻でともに、

$$\rho_{j-1} = \rho_f - M_1 \exp\{\lambda_1 \Delta t \cdot (j-1)\}$$

$$\rho_j = \rho_f - M_1 \exp(\lambda_1 \Delta t \cdot j)$$

が言えるから、この2式から $M_1 \exp(\lambda_1 \Delta t \cdot j)$ を消去すると、次式を得る。

68

$$\rho_j = \beta_0 + \beta_1 \rho_{j-1}$$

ここに、

$$\beta_1 = \exp(\lambda_1 \Delta t), \quad \beta_0 = \rho_f (1 - \beta_1)$$

で与えられ、 $\lambda_1 < 0$ より、

$$0 < \beta_1 < 1 \quad 0 < \beta_0 < \rho_f$$

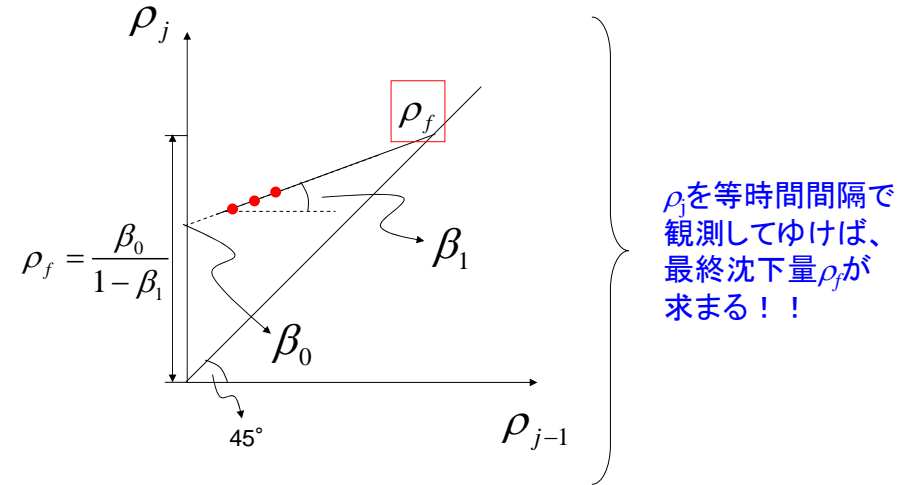
この「漸化式」を解くと、

$$\rho_j = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + (\beta_1)^j C$$

ここで、 C はある k 番目($k < j$)の(観測)時刻での $\rho_k - \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}$ の値。

69

この結果を $\rho_j \sim \rho_{j-1}$ 図上に示すと、



70

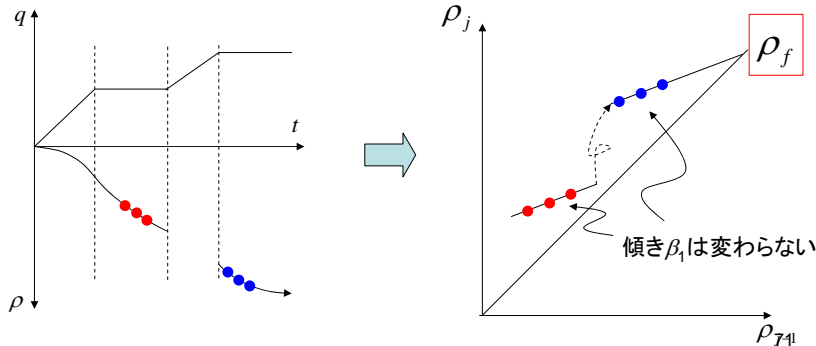
見どころ

(a) β_0 : 荷重が倍なら倍 ($\because \rho_f = m_v q H$) \rightarrow 人が変えられる

(b) β_1 : 地盤の硬さ、透水係数、層厚、排水条件

\rightarrow 人が変えられない

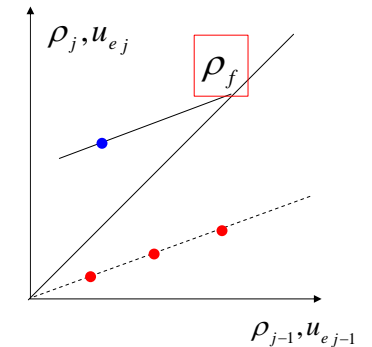
多段階盛土载荷の場合



(c) 過剰水圧も同じ β_1 で減少

\rightarrow 場所を変えて水圧を測る

\rightarrow ある点の ρ_f が求まる。



(d) 空間的分布を調べる代わりに

一点の経時変化を調べれば、地盤特性(固有値)が分かる!?

注意点:

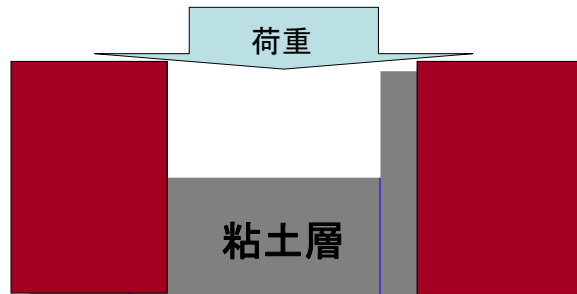
(a) 多次元(弾性)圧密でも、仕組みは一緒。

(b) 漸増载荷中でも β_1 を求めることはできるが、省略。

72

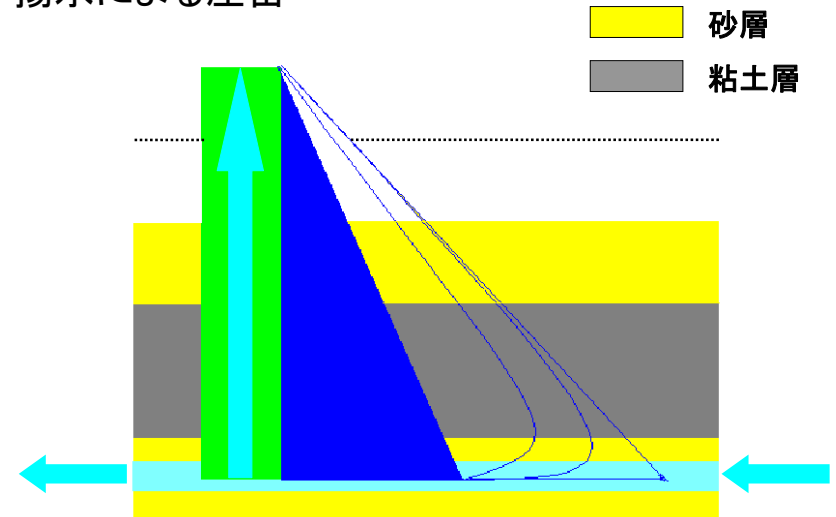
(6) 地下水揚水による地盤の圧密

荷重による圧密の場合



73

揚水による圧密



揚水をする事と荷重をかける事は同じ

本講座のまとめ

- 飽和土は二相混合体である。
- 圧密は、ダルシー則に支配された土の体積変化が生じる条件下で、力のつりあい式を刻々解いてゆく初期値・境界値問題
- 基礎方程式は過剰水圧に関する熱伝導型(放物型)の偏微分方程式になる。(微小変形の場合)
- 十分時間が経つと、過剰水圧は第1モードの消散だけで表現できる。
- 浅岡による沈下予測の観測的方法もわかる!

など。

おしまい

75

(3)' フーリエの方法

(i) 一次元圧密方程式を**変数分離法**で求める。

$$\frac{\partial u_e(z,t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u_e(z,t)}{\partial z^2} \quad 0 \leq z \leq H, t \geq 0$$

の解を、次式で表す。

$$u_e(z,t) = F(z)G(t)$$

ここに、 F と G はそれぞれ z および t のみの関数。

これを圧密方程式に代入すると、

$$F(z) \frac{dG(t)}{dt} = c_v G(t) \frac{d^2 F(z)}{dz^2}$$

から求めることができる。

76

つまり、

$$\frac{1}{c_v} \frac{1}{G(t)} \frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{F(z)} \frac{d^2 F(z)}{dz^2}$$

この式で、左辺は t の関数、右辺は z の関数であるが、それが等しいので、左辺と右辺にそれぞれ t と z が含まれてはならないので、**定数でないといけない**。ここでそれを $-A^2$ (負)とおくと、二つの常微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = -A^2 F \quad \frac{dG}{dt} = -A^2 c_v G$$

第一式の解は、 c_1 と c_2 を積分定数として、

$$F(z) = c_1 \cos(Az) + c_2 \sin(Az)$$

第二式の解は、 c_3 を積分定数として、

$$G(t) = c_3 \exp(-A^2 c_v t)$$

となる。最終的に、 $c_1 c_3 = b_1$ 、 $c_2 c_3 = b_2$ とおいて解 $u_e(z, t)$ は次の形。

$$u_e(z, t) = (b_1 \cos Az + b_2 \sin Az) \exp(-A^2 c_v t)$$

77

未知定数 A の決定は境界条件から。

$$\text{排水条件} \quad u_e(z=0, t) = 0$$

$$\text{非排水条件} \quad \frac{\partial u_e(z=H, t)}{\partial z} = 0$$

だから、次式を満足する。

$$b_2 \cos AH = 0 \quad \text{式(A)}$$

ここに、 $b_2=0$ としたのでは自明解(定常解)のみなので、 $b_2 \neq 0$ を考えると、

$$A = \frac{1}{H} \frac{2n-1}{2} \pi, \quad n=1, 2, \dots$$

から求めることができる。 A は任意ではなく、**境界条件に依存するトビトビの値**。式(A)は**固有方程式**、 $-A^2$ は**(圧密問題の)固有値**と呼ぶ。

78

ゆえに、**境界条件を満足する解** $u_e(z, t)$ として、次式が決まる。

$$u_e(z, t) = B_n \sin A_n z \cdot \exp(-A_n^2 c_v t)$$

$$A_n = \frac{1}{H} \frac{2n-1}{2} \pi$$

ここに、 B_n と A_n はそれぞれ n 番目の b_2 と A のこと。

79

(ii) **解の重ね合わせ**

境界条件を満足するすべての解の重ね合わせた式

$$u_e(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin A_n z \cdot \exp(-A_n^2 c_v t) \quad \text{式(B)}$$

も偏微分方程式と境界条件を満たす。

B_n を決めるのは、**初期条件**

$$u_e(z, t=0) = u_{e0}(z) \quad 0 \leq z \leq H$$

を利用する。つまり、式(B)において $t=0$ とおけば、次式を得る。

$$u_{e0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{1}{H} \frac{2n-1}{2} \pi\right) z \quad \text{式(C)}$$

80

「直交関数」の性質を利用しよう。すなわち、 m, n を整数として、

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi/2 & (m = n) \end{cases}$$

を用いて、 B_n を決めるが、さらに変数変換

$$x = \frac{1}{H} \frac{\pi}{2} z$$

を行い、次式に変換しておく。

$$\int_0^{2H} \sin \frac{m\pi}{2H} z \sin \frac{n\pi}{2H} z dz = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ H & (m = n) \end{cases}$$

したがって、式(c)の両辺に $\sin \frac{2m-1}{2H} \pi z$ を乗じて、 $0 \sim H$ で積分すれば、

$$\int_0^{2H} u_{e0}(z) \sin \frac{2m-1}{2H} \pi z dz = B_m H$$

を得る。

81

したがって、前述の境界条件でなおかつ、一般の初期条件に対する圧密方程式の解として、次式を得る。

$$u_e(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin A_n z \exp(-A_n^2 c_v t)$$

ここに、

$$\begin{cases} A_n = \frac{2n-1}{2H} \pi \\ B_n = \int_0^{2H} u_{e0}(z) \sin A_n z dz \end{cases}$$

82

(補足) 一次元変形に対する弾性構成式

フックの法則は、主応力・主ひずみ状態を仮定すると、以下のようになる。

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \{\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\}$$

ここで、一次元状態 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \sigma_2 = \sigma_3$ を考えると、次式を得る。

$$\varepsilon_1 = m_\nu \sigma_1$$

ここに、

$$m_\nu = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$$

※ 有効応力表示はしていません。

83