

$u-w-p$ 水～土連成解析による有限変形を伴う 超高透水性多孔質媒体内での間隙水の動的流れの解明

豊田智大¹, 野田利弘²

1 名古屋大学・減災連携研究センター・toyoda.tomohiro@i.mbox.nagoya-u.ac.jp

2 名古屋大学・減災連携研究センター

概 要

著者らがこれまでに開発してきた $u-w-p$ 法に基づく水～土骨格連成 FEM を用いて、有限変形する高透水性媒体内での間隙水の動的 migration を解く。これにより、既往の $u-p$ 法では求解不能な問題が求解可能となることを示し、 $u-w-p$ 法により間隙中を反射や回転を伴って運動する液相の応答が解かれ得ることを示す。さらに、間隙水の慣性の影響により土骨格のみかけの応答が変動することを示す。

キーワード：水～土骨格連成解析, Full-formulation, $u-w-p$ formulation, 有限変形, 高透水性

1. はじめに

混合体理論は Boltzmann 方程式に基づく混合気体の運動の定式化を端緒とするが、同一の空間領域を占める複数の場をその相互作用を考慮しながら求解してゆく試みは、Biot¹⁾を通して水～土骨格連成解析へと進化を遂げた。著者らもまた飽和土の水～土骨格連成解析手法を開発してきたが、これに慣性力を考慮して動的問題へと拡張²⁾する段階において「 $u-p$ 仮定」と呼ばれる近似を導入している。

$u-p$ 仮定は、間隙水の浸透加速度（液相の固相に対する相対加速度）が固相の加速度よりも十分に小さい、すなわち

$$D_f v_f - D_s v_s \ll D_s v_s \quad (1)$$

を課すことで、間隙水の動的応答を無視するものであることから、「静的浸透の仮定」と見做すこともできる。ここに、 D_s , および D_f は固相および液相に関する物質時間微分、 v_s , v_f は固相および液相の速度である。

さて、水～土骨格連成問題の支配方程式は元来混合体の運動方程式

$$\rho_s D_s v_s + \rho_f D_f v_f = \text{div } T + \rho b \quad (2)$$

液相の運動方程式

$$\rho^f D_f v_f = -\gamma_w \text{grad } h - \frac{\gamma_w}{k} w \quad (3)$$

水～土骨格連成式

$$\text{div } v_s + \text{div } w = 0 \quad (4)$$

と書かれ、この方程式を解くことで固相速度 v_s , 液相速度 v_f または間隙水の相対平均流速 $w = n(v_f - v_s)$, 間隙水圧 p が求まる。ここに、 $\rho = \rho_s + \rho_f$, $\rho_s = (1-n)\rho^s$, $\rho_f = n\rho^f$, ρ^s , ρ^f はそれぞれ混合体、固相、液相、土粒子、間隙水の密度、 T は Cauchy の全応力テンソル、 b は物体力、 n は間隙

率、 $h = z + p/\rho^f g$ は全ヘッド、 z は基準面からの高さ、 k は透水係数、 γ_w は間隙水の単位体積重量、 g は重力加速度である。式(3)に式(2)を代入しつつ、 $u-p$ 仮定を用いると、支配方程式中の液相の運動 (v_f および w) を消去することができて、支配方程式は以下のように書き換えられる。

混合体の運動方程式

$$\rho D_s v_s = \text{div } T + \rho b \quad (5)$$

水～土骨格連成式

$$\text{div } v_s - \text{div}(k \text{grad } h) - \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \text{div}(D_s v_s) = 0 \quad (6)$$

これらの支配方程式(5), (6)を連立して解く手法は $u-p$ formulation と呼ばれ、未知数は固相速度 v_s と間隙水圧 p の2つに縮約される。しかし、先の「 $u-p$ 仮定」の導入により、間隙水の加速度を無視しているため、間隙水が動的にも浸透する高透水性土の連成問題に対して適用しようとするれば、計算が破綻してしまう。時間積分法に Wilson- θ 法を用いた場合、以式で表される $\gamma_{\theta 1}$ の値が負になると計算が破綻することが知られており²⁾、これは透水係数 k が大きい場合や時間刻み幅 Δt が小さい場合に生じる。

$$\gamma_{\theta 1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \quad (7)$$

そこで著者らは、支配方程式(2), (3), (4)を、近似を導入することなく直接離散化して解く「Full-formulation」に基づく連成解析手法を開発してきた³⁾。本稿では、高透水性飽和土供試体の二次元平面ひずみ非排水条件下での急速変形問題を例にとり、Full-formulation で解かれうる間隙水の動的輸送とその影響について検討した結果を示す。また、 $u-p$ formulation との比較を通して、Full-formulation により $u-p$ formulation の限界が克服されうることを確認する。

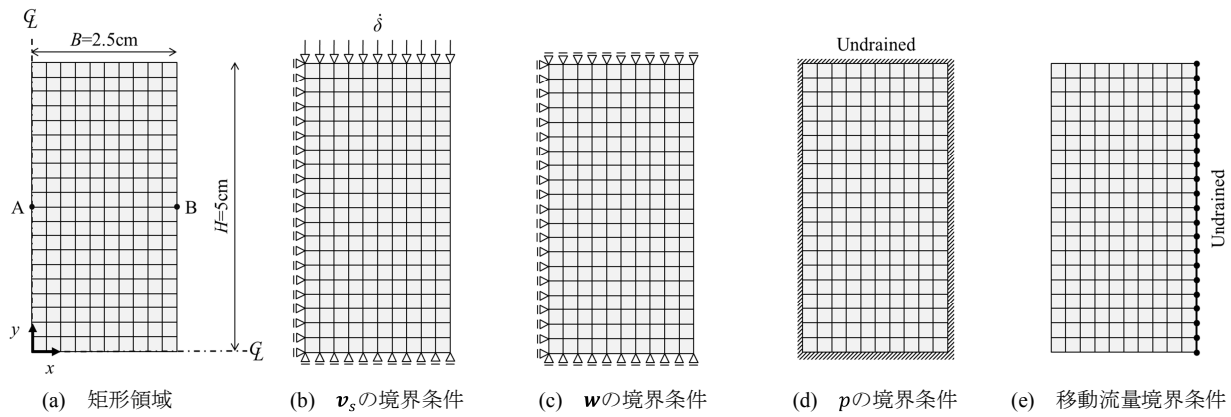


図 1 有限要素メッシュと境界条件

2. 解析条件

2.1 解析手法

ここでは、Full-formulation の中でも、とくに液相の運動を記述する未知変数として間隙水の相対平均流速 $\mathbf{w}$ を採用する「 $\mathbf{u}-\mathbf{w}-p$ formulation」に基づく定式化を採用する。離散化には表 1 に示す手法を用いた。自重は考慮しない。

2.2 材料定数

解析には速度型弾塑性構成式 SYS Cam-clay model⁴⁾を用いた。Noda et al.²⁾に倣い、各種材料パラメータは表 2 のとおり設定した。初期状態として練り返し正規圧密土を想定し、異方性は考慮しない。透水係数は超高透水性土となるよう $k=10$ cm/s とした。

2.3 有限要素メッシュ

図 1(a)のような平面ひずみ矩形供試体の変形を解く。ただし、上下対象性を仮定し、解析領域は供試体の 1/4 断面とする。矩形領域の幅は $B=2.5$ cm、高さは $H=5$ cm とした。

2.4 境界条件

固相速度 $\mathbf{v}_s$ に関する境界条件：図 1(b)に示すように、対称軸に直交する変位を 0 とした。領域上端においては、急速な下向きの変位速度 $\delta=10^{-1}$ m/s を与えるとともに、端面摩擦を考慮し、水平方向変位を拘束した。これにより、供試体は非一様に変形することとなる。

間隙水の相対平均流速 $\mathbf{w}$ に関する境界条件：非排水試験を想定するため、図 1(c)に示すように、対象軸上ならびに領域右端面における流速の法線方向成分を 0 とした。領域右端は供試体の有限変形に伴い回転してゆくため、図 1(e)の辺上において、その非排水条件を移動境界上の制約条件式として支配方程式に連立し、束縛力（境界水圧）を液相の運動方程式中に組み込むことで処理した³⁾。

間隙水圧 p （ヘッド h ）に関する境界条件：図 1(d)のように、領域境界全体で境界流量がゼロとなるように、Christian・田村流の物理モデルにおける係数を設定した。

表 1 離散化手法

未知変数	空間離散化	時間積分公式
固相速度 $\mathbf{v}_s$	Isoparametric 要素 (1 次)	Wilson- θ 法*
相対平均流速 $\mathbf{w}$	Isoparametric 要素 (1 次)	Wilson- θ 法*
間隙水圧 p	要素代表値 (Christian・田村流)	台形公式

* 躍度（加加速度）の線形性を仮定

表 2 離散化手法

弾塑性パラメータ	
圧縮指数 $\bar{\lambda}$	0.050
膨潤指数 $\bar{\kappa}$	0.012
NCL の切片 N	1.98
限界状態定数 M	1.00
ポアソン比 ν	0.30
発展則パラメータ	
正規圧密土化指数 m	0.06
物性値	
土粒子の密度 ρ^s (g/cm ³)	2.65
間隙水の密度 ρ^f (g/cm ³)	1.00
透水係数 k (cm/s)	10
水の単位体積重量 γ_w (kN/m ³)	9.81

2.5 初期条件

時刻 $t=0$ においては固液両相ともに静止しているものとして、全節点において $\mathbf{v}_s|_{t=0} = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{0}$ とした。また、初期セル圧および供試体の拘束圧を $p_c=294.3$ kPa とした（このとき、間隙水圧は $p|_{t=0}=0$ 、比体積は $v_0=1.925$ となる）。種々の状態量は供試体内で一様に分布させた。

2.6 解析条件

時間刻み幅を $\Delta t=2 \times 10^{-6}$ sec とした。また、Wilson- θ 法に基づく時間積分に際しては $\theta=1.4$ とした。

3. 解析結果

3.1 間隙水の動的流れ現象の観察

供試体の変形に伴う間隙水の相対平均流速分布 $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ の変化を図 2 に、比体積分布 $v(\mathbf{x}, t)$ の変化を図 3 に、間隙水圧分布 $p(\mathbf{x}, t)$ の変化をそれぞれ図 4 に示す。

まず、図 2 より、間隙水の供試体内における動的流れ現象が観察できる。とくに、解析の初期段階においては、同図(a)~(b)のような反射を伴う流れや、同図(c)~(d)のような

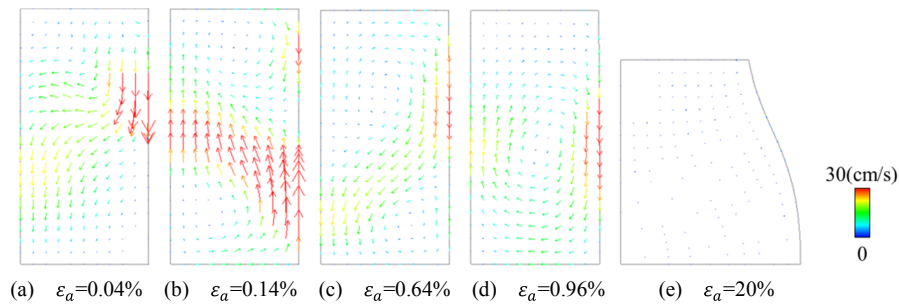


図2 間隙水の相対平均流速分布

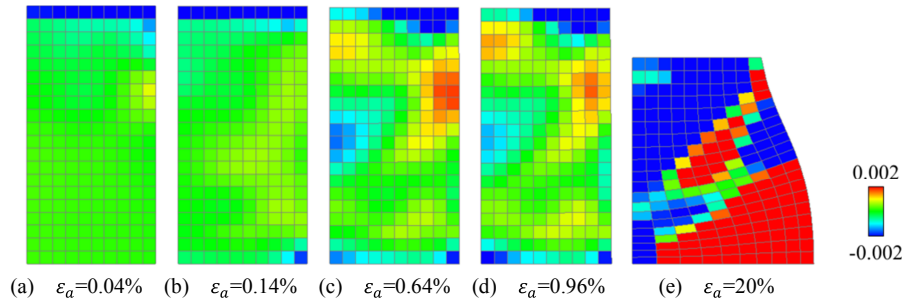


図3 比体積分布

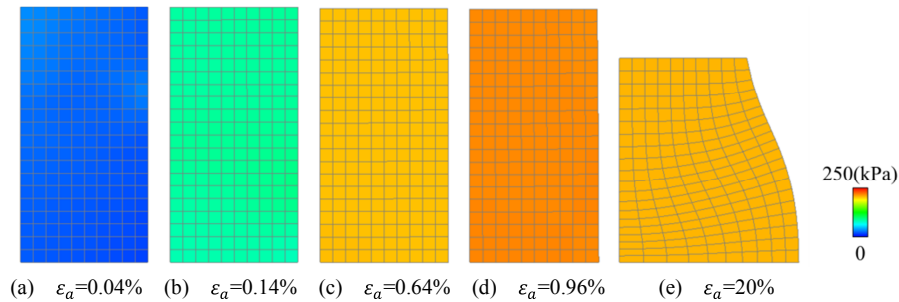


図4 間隙水圧分布

回転を伴う流れの発生が確認できる。その後は、時間の経過に伴い流速は次第に減衰してゆき、やがて同図(e)のように動的流れは完全に消滅する。なお、ここで解かれている回転流は、静的 Darcy 則によつては解かれ得ず、間隙水の慣性が液相の運動方程式中に考慮されたことではじめて求解されうる現象である。

図3に示す比体積分布は非一様となるが、これは、間隙水の動的流れに伴って生じる要素毎の吸排水に起因するものである。一方、図4に示す間隙水圧分布は常に一様であるが、これは非一様変形により生じた動水勾配が高透水性媒体中で速やかに解消されることによる。

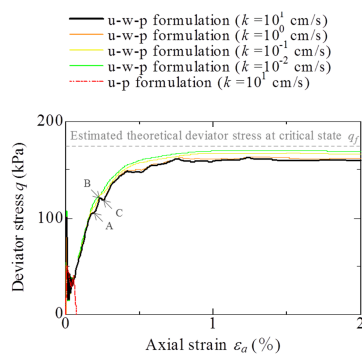
3.2 動的流れが供試体のみかけの挙動に及ぼす影響

3.1 の計算について、供試体のみかけの応答として、軸差応力 q ～軸ひずみ ε_a 関係、軸差応力 q ～平均有効応力 p' 関係をそれぞれ図5(a), (b)に黒線で示す。ただし、 q および p' は、供試体上端の反力および間隙水圧から算定している。また、みかけの軸差応力は、運動方程式より①外力、②土骨格の慣性力、③間隙水の慣性力にそれぞれ由来する項の和として求めている。同図の応力経路は、一見すると除荷～再載荷を繰り返すように振動する応答が解かれている

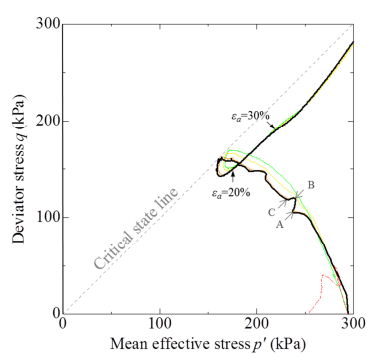
ように見える。しかし、実はこの現象もまた、間隙水の動的応答に起因して生じたものであると解釈できる。図6は、図5(a)の黒線で示される軸差応力を再プロットした上で、この軸差応力に占める間隙水の寄与分（上記の③に由来）のみを抽出し、灰線で表示したものである。図6は、端面で上向きの間隙水加速度が生じているときはみかけの軸差応力が増加し（時点AおよびC）、端面で下向きの間隙水加速度が生じているときはみかけの軸差応力が減少することを示している（時点B）。すなわち、間隙水がペDESTALに加速度的に衝突する／引き込むことによる反力の増減が、供試体のみかけの応答に影響を与えることが示唆された。

3.3 透水係数を変えた解析

3.2 で計算した透水係数を $k=10^1 \text{ cm/s}$ のケースのほか、 $k=10^0, 10^{-1}, 10^{-2} \text{ cm/s}$ のケースについても計算を行い、その応力経路を図5(a), (b)にそれぞれ橙線、黄線、緑線で併記する。これらを比較すると、3.2 で確認したみかけの振動現象は、透水係数を小さくするにつれて消滅し、曲線はより滑らかなものとなることがわかる。これは、液相の運動方程式(3)右辺第2項のDarcyの抵抗力項が混合体の運動



(a) 軸差応力～軸ひずみ関係



(b) 軸差応力～平均有効応力関係

図5 供試体のみかけの応答

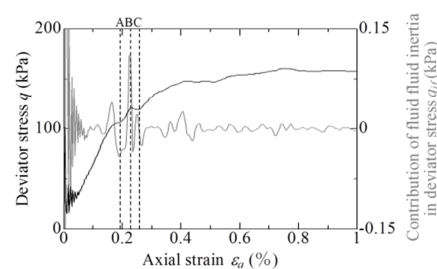


図6 みかけの軸差応力 q とその液相慣性寄与分 q_{if} の比較

方程式(1)中では（土骨格にとっては）粘性項として寄与するが、この抵抗力は透水係数が小さいほど反比例して大きくなるため、応答がより過減衰的になることと対応する。

3.4 u-p formulation との比較

透水係数 $k=10$ cm/s の問題を、**u-p formulation** で解いた場合のみかけの応答を図5に赤線で示す。**u-p formulation** による解は、**u-w-p formulation** の解である黒線から大きく逸脱するばかりか、軸差応力はやがて負に転じ、そのまま発散してしまう。これは、**u-p** 近似が成り立たない（間隙水の加速度的運動を伴う）問題を強引に求解しようとしたことによる。換言すれば、**u-p formulation** によっては解き得なかった高透水性土の急速変形問題であっても、**Full-formulation** の導入により求解可能となることが確認された（**Full-formulation** の有効性）。なお、式(7)に示す $\gamma_{\theta 1}$ の値は確かに負になっていることから（ $\gamma_{\theta 1} = -182 < 0$ ）、これによる水～土骨格連成式の符号反転²⁾に起因して負の軸差応力が生じたと考えられる。

4. まとめ

飽和土の水～土骨格連成問題を、低透水性土から高透水性土までシームレスに求解可能な「**u-w-p formulation**」に基づく二相系連成解析手法を新たに開発し、これを高速変形する高透水性供試体の有限変形問題に適用することで、以下の知見を得た。

- **u-w-p formulation** に立脚した連成解析手法により、間隙水の動的 migration, すなわち、反射や回転を含む間隙水の加速度的応答の出現が解かれうることを示した。
- 間隙水の動的応答が供試体のみかけの応答に対して影響を与えうることを、つまり、応力ひずみ関係やストレスパスの振動現象として計測されうることを示した。また、この影響は透水係数が大きいほど顕著に現れることを示した。
- **u-p formulation** では計算が破綻する高透水性土の連成問題が、**Full-formulation** であれば難なく解かれ得ることを確認した。

参考文献

- 1) Biot, M. A.: General Theory of three-dimensional consolidation, Journal of Applied Physics, Vol.12, pp.155-164, 1941.
- 2) Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, Soils and Foundations, Vol.48, No.6, pp.771-790, 2008.
- 3) Noda, T. and Toyoda, T.: Development and verification of a soil-water coupled finite deformation analysis based on **u-w-p** formulation with fluid convective nonlinearity, Soils and Foundations (in press).
- 4) Asaoka, A., Noda, T., Yamada, E., Kaneda, K. and Nakano, M.: An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanics of soils, Soils and Foundations, Vol.52, No.5, pp.45-57, 2002.