

改良型粒子法を用いた地盤の変形解析

Deformation Analysis of Geomaterials using SSPH Method

野々山栄人¹, 中野正樹², 野田利弘³

- 1 名古屋大学・社会基盤工学専攻・nonoyama@civil.nagoya-u.ac.jp
- 2 名古屋大学・社会基盤工学専攻
- 3 名古屋大学・減災連携研究センター

概要

粒子法は連続体の構成式に基づいて大変形を表現できる解法の1つである。地盤工学では、地盤材料の構成式を粒子法に導入し、地盤の大変形問題を対象とした研究が進められている。一方、従来の粒子法では、計算精度、特に自由表面での精度が低下する問題が指摘されている。本論文では、従来型のSPH法および改良型のSSPH法を用いて、自由表面を有する単純せん断問題での計算精度の比較検証を行った。Taylor展開の高次項を考慮することで、その精度を大幅に向上できることが確認できた。

キーワード：粒子法, 単純せん断, 変形解析

1. はじめに

近年、豪雨や地震時に自然斜面や盛土をはじめとする土構造物の崩壊が頻繁に発生している。このような地盤災害は大規模な変状を示すものが多い。地盤工学の数値解析分野では、このような大変形問題を解くために、様々な解析手法を用いた研究が進められている。メッシュフリー法の1種である粒子法(SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)法¹⁾²⁾やMPS(Moving Particle Semi-implicit)法³⁾もその1つであり、これまでに、地盤工学の諸問題への適用が行われてきた。ただ、解法自体の精度に関する議論や高精度化への取り組みなどが行われ始めているものの、地盤工学の分野ではあまり検討されずに定性的な議論のツールとして用いられることが多い。粒子法は連続体の枠組みで大変形問題を解くことができるという利点があり、定量的また工学的な解析ツールとして用いるためにも、高精度化への取り組みは必須である。

本研究では、地盤災害の大変形挙動を高精度に記述できる粒子法の開発を目指している。本論文では、SSPH (Symmetric Smoothed Particle Hydrodynamics)法⁴⁾と呼ばれる改良型粒子法を新たに用いた。まず、改良型手法を用いて弾性体および弾塑性体のせん断解析を実施し、従来型SPH法との精度の比較を行う。なお固体力学に基づいた粒子法では、客観性のある応力速度として、Cauchy 応力のJaumann速度が導入されることがほとんどであるが、本研究ではGreen-Naghdi速度⁵⁾を導入し、理論解が既知な弾性解析を実施し、両手法による解と理論解との比較を行う。次いで、弾塑性解析では、地盤材料を表現するために、土

の骨格構造(構造・過圧密・異方性)の働きを表現することができる弾塑性構成モデル(SYSカムクレイモデル)⁶⁾を導入し、両手法を理論解と比較し、改良型粒子法の有用性を考察する。

2. 数値解析手法

以下では、改良型手法であるSSPH法の評価式と固体力学に基づいて離散化する方法についてまとめる。従来型SPH法⁷⁾および本研究で導入したSYSカムクレイモデルの詳細については、参考文献に譲る。

2.1 SSPH法⁴⁾

SPH法の高精度化手法として、現在提案されている代表的な改良型手法(例えば、CSPM⁸⁾、FPM⁹⁾、やMSPH法¹⁰⁾)は、多変数関数をTaylor展開することで現れる高次項を考慮して精度の向上を図っている。本研究で用いたSSPH法も、これらの改良型手法と同様にTaylor展開の高次項を考慮する手法であり、3次項まで用いる手法である。先に挙げた改良型手法と大きく異なる点として、平滑化関数の空間勾配を用いずに、粒子間距離を用いて計算することにある。つまり、平滑化関数の1階および2階の微分値を求める必要がないため、平滑化関数の選択に関する制限がないという利点がある。以下には、2次元におけるSSPH法の評価式を示す。式(1)に示した連立方程式を解くことで、空間勾配の各成分を計算することができる。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{K} 、 \mathbf{T} はそれぞれ次式で表すことができる。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle f(x^\alpha) \rangle}{\partial x}, \frac{\partial \langle f(x^\alpha) \rangle}{\partial y}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle f(x^\alpha) \rangle}{\partial x^2}, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle f(x^\alpha) \rangle}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \langle f(x^\alpha) \rangle}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}^T \quad (2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} X^2 \tilde{W} & YX \tilde{W} & X^3 \tilde{W} & Y^2 X \tilde{W} & X^2 Y \tilde{W} \\ XY \tilde{W} & Y^2 \tilde{W} & X^2 Y \tilde{W} & Y^3 \tilde{W} & XY^2 \tilde{W} \\ X^3 \tilde{W} & YX^2 \tilde{W} & X^4 \tilde{W} & Y^2 X^2 \tilde{W} & X^3 Y \tilde{W} \\ XY^2 \tilde{W} & Y^3 \tilde{W} & X^2 Y^2 \tilde{W} & Y^4 \tilde{W} & XY^3 \tilde{W} \\ X^2 Y \tilde{W} & XY^2 \tilde{W} & X^3 Y \tilde{W} & Y^3 X \tilde{W} & X^2 Y^2 \tilde{W} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} (f(x^\beta) - f(x^\alpha))X \tilde{W} \\ (f(x^\beta) - f(x^\alpha))Y \tilde{W} \\ (f(x^\beta) - f(x^\alpha))X^2 \tilde{W} \\ (f(x^\beta) - f(x^\alpha))Y^2 \tilde{W} \\ (f(x^\beta) - f(x^\alpha))XY \tilde{W} \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、 \tilde{W} , X , Y は以下である。

$$\tilde{W} = \sum_{\beta=1}^N \frac{m^\beta}{\rho^\beta} W^{\alpha\beta} \quad (5)$$

$$X = x^\beta - x^\alpha, \quad Y = y^\beta - y^\alpha \quad (6)$$

ここで、 α は評価点粒子、 β は周辺粒子、 N は周辺粒子の個数、 x , y は位置、 m^β は周辺粒子の質量、 ρ^β は周辺粒子の密度、 $W^{\alpha\beta}$ は周辺粒子 β から評価点粒子 α への寄与を表す平滑化関数である。

2.2 固体力学に基づいた定式化

以下に、連続体力学に基づいて支配方程式である質量保存則および運動量保存則をそれぞれ示す。なお、本論文では、間隙水の影響は考慮していないため、一相系の解析となっている。

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (7)$$

$$a_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \quad (8)$$

ここで、 v_i は速度ベクトル、 a_i は加速度ベクトル、 σ_{ij} は応力テンソル、 F_i は単位質量あたりの物体力である。式(7)、(8)をSSPH法の評価式を用いてそれぞれ離散化する。

$$\rho \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\beta=1}^N m^\beta (v_i^\beta - v_i^\alpha) X W^{\alpha\beta} \\ \sum_{\beta=1}^N m^\beta (v_i^\beta - v_i^\alpha) Y W^{\alpha\beta} \\ \sum_{\beta=1}^N m^\beta (v_i^\beta - v_i^\alpha) X^2 W^{\alpha\beta} \\ \sum_{\beta=1}^N m^\beta (v_i^\beta - v_i^\alpha) Y^2 W^{\alpha\beta} \\ \sum_{\beta=1}^N m^\beta (v_i^\beta - v_i^\alpha) XY W^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\beta=1}^N m^\beta \left(\frac{\sigma_{ij}^\alpha}{(\rho^\alpha)^2} + \frac{\sigma_{ij}^\beta}{(\rho^\beta)^2} \right) X W^{\alpha\beta} \\ \sum_{\beta=1}^N m^\beta \left(\frac{\sigma_{ij}^\alpha}{(\rho^\alpha)^2} + \frac{\sigma_{ij}^\beta}{(\rho^\beta)^2} \right) Y W^{\alpha\beta} \\ \sum_{\beta=1}^N m^\beta \left(\frac{\sigma_{ij}^\alpha}{(\rho^\alpha)^2} + \frac{\sigma_{ij}^\beta}{(\rho^\beta)^2} \right) X^2 W^{\alpha\beta} \\ \sum_{\beta=1}^N m^\beta \left(\frac{\sigma_{ij}^\alpha}{(\rho^\alpha)^2} + \frac{\sigma_{ij}^\beta}{(\rho^\beta)^2} \right) Y^2 W^{\alpha\beta} \\ \sum_{\beta=1}^N m^\beta \left(\frac{\sigma_{ij}^\alpha}{(\rho^\alpha)^2} + \frac{\sigma_{ij}^\beta}{(\rho^\beta)^2} \right) XY W^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (10)$$

また、客観性のある応力速度として、本研究ではCauchy応力のGreen-Nagdhi速度 $\hat{\sigma}$ を用いる。そのために必要な変形勾配テンソル \mathbf{F} の離散化方法については、MPS法の計算方法¹¹⁾を参考にして次式より求めた。

$$\mathbf{F}^\alpha = \left[\sum_{\beta=1}^N \frac{\bar{x}_i^{\alpha\beta}}{|\bar{x}_i^{\alpha\beta}|} \otimes \frac{\bar{x}_i^{\alpha\beta}}{|\bar{x}_i^{\alpha\beta}|} \frac{m^\beta}{\rho^\beta} W^{\alpha\beta} \right]^{-1} \cdot \sum_{\beta=1}^N \frac{\bar{x}_i^{\alpha\beta}}{|\bar{x}_i^{\alpha\beta}|} \otimes \frac{x_i^{\alpha\beta}}{|\bar{x}_i^{\alpha\beta}|} \frac{m^\beta}{\rho^\beta} W^{\alpha\beta} \quad (11)$$

ここで、 $\bar{x}_i^{\alpha\beta}, x_i^{\alpha\beta}$ はそれぞれ評価点粒子 α と周辺粒子 β の初期相対位置ベクトルおよび相対位置ベクトルである。式(11)より得られた変形勾配から、ヤコビ法を用いて、固有値、固有ベクトルを求め、回転テンソル \mathbf{R} を次式より求めた。

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} \quad (12)$$

ここで、 \mathbf{U} は右ストレッチテンソル(正定値対称テンソル)であり、次式より求めることができる。

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (13)$$

得られた回転テンソル \mathbf{R} から物質スピテンソル $\mathbf{\Omega}$ を求めることで、客観性のある応力速度が用いることができる。

$$\hat{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} \sigma, \quad \mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \quad (14)$$

ここで、 $\dot{\sigma}$ はCauchyの応力速度テンソルである。

3. 単純せん断解析による検証

3.1 弾性体

応力速度にCauchy応力のGreen-Nagdhi速度を導入し、弾性体の単純せん断解析を行い、両手法の精度を比較した。表1に解析に用いた材料定数を示す。図1に解析モデルを示す。解析対象は正方形供試体(計算点100個)とし、その外側(1層分)に計算点を配置し、その計算点にのみ強制変位速度を与えた。

表1 材料定数

せん断剛性	G[Pa]	10.0
ポアソン比	ν	0.30

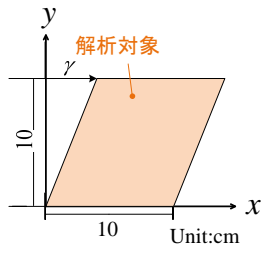


図1 解析モデル

図2に供試体中心位置で得られたせん断応力 τ_{xy} ～せん断ひずみ γ_{xy} 関係および理論解を示す。弾性体の単純せん断時のGreen-Naghdi速度を用いた場合のせん断応力～せん断ひずみ関係は次式となる¹²⁾。

$$\tau_{xy} = 2G \begin{Bmatrix} (2\beta - \tan \beta) \cos 2\beta \\ -2 \sin 2\beta \ln(\cos \beta) \end{Bmatrix}, \gamma = \tan \alpha = 2 \tan \beta \quad (9)$$

図3に両手法のせん断ひずみ50, 100, 150, 200%時の変形形状および変形勾配テンソルの F_{11} 成分の分布をそれぞれ示す。弾性体の単純せん断変形では、変形勾配テンソルの各値は既知であり、 F_{11} 成分の値は1となる。

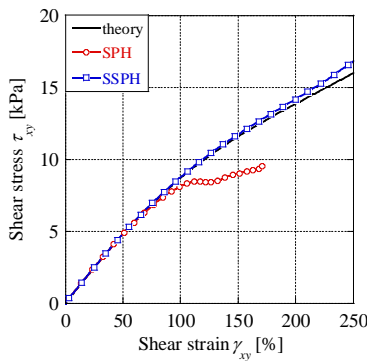


図2 せん断応力～せん断ひずみ関係

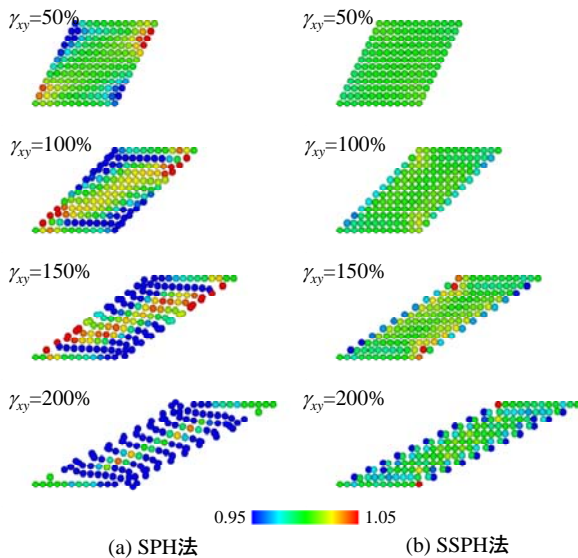


図3 変形勾配テンソル F_{11} 成分の分布

図2に示すように、SPH法ではせん断ひずみが100%を超えたあたりから理論解と解析解に大きなずれが生じ、途中で計算が破綻してしまった。一方、SSPH法では、せん断ひずみ250%程度までは理論解と概ね一致していることが確認できる。図3からもわかるように、SPH法では、計算点が不足する境界付近の影響が中心部分に伝わって計算が破綻したと推測できる。

3.2 弾塑性体（緩詰めから密詰め砂）

これまでの研究¹³⁾では土の骨格構造として、構造と過圧密の影響を考慮してきた。今回新たに異方性の影響についても考慮して、3.1と同様の単純せん断解析を実施した。構成式による要素シミュレーションの結果を理論解として、両手法で得られた解析結果と比較し、その精度を検証した。応力速度には、既往の研究⁹⁾と同一であるGreen-Naghdi速度を用いた。表2に解析に用いた材料定数（弾塑性パラメータおよび発展則パラメータ）および初期値（過圧密・構造・異方性・比体積）を示す。検証には、既往の研究¹⁴⁾で砂を模擬した際に用いた材料定数をそのまま用い、初期値を変化させて、緩詰め状態から密詰め状態までの3ケースの解析を行った。拘束圧一定条件下で比体積、構造および過圧密の程度、異方性を変化させた。

表2 材料定数

case	1	2	3	
弾塑性パラメータ				
圧縮指数	$\tilde{\lambda}$	0.050		
膨潤指数	$\tilde{\kappa}$	0.0120		
限界状態定数	M	1.0		
NCLの切片 (98.1kPaの時)	N	1.98		
ポアソン比	ν	0.3		
発展則パラメータ				
正規圧密土化指数	m	0.06		
構造劣化指数	a	2.2		
構造劣化指数	b=c	1.0		
構造劣化指数	c_s	1.0		
回転硬化指数	b_r	3.5		
回転硬化限界定数	m_b	0.7		
初期値				
過圧密比	$1/R_0$	1.25	4.23	6.58
構造の程度	$1/R_0^*$	73.73	2.85	2.01
比体積	v_0	2.08	1.91	1.88
異方性	ζ_0	0.01	0.23	0.30
初期等方応力	p_0 [kPa]	294.3		

図4、図5に、各手法を用いて、解析対象領域の中心で得られた各ケースの解析結果および理論解((a)せん断応力～せん断ひずみ関係、(b)応力経路、(c)、(d)、(e)せん断中の過圧密、構造および異方性の推移)をそれぞれ示す。図中の実線が理論解であり、プロットが本解析で得られた解析結果である。

図4、図5より、せん断中の過圧密、構造および異方性の推移は各手法とも理論解と概ね一致していることがわかる。せん断応力～せん断ひずみ関係に着目すると、SPH法ではひずみの増加に伴って、偏差応力 q の値が理論解と差異が生じている。特にcase2, 3ではその傾向が顕著に

確認できる。これは、SPH法では、計算点が不足する箇所では計算精度が低下することに起因している。一方、SSPH法では、変形量に関係なく理論解とほぼ一致しており、等体積条件下で、既往の研究¹⁴⁾で示された緩詰め状態から密詰め状態までの砂の挙動を表現できている。例外として、SSPH法を用いたcase2の計算が途中で破綻してしまった。この原因の1つとして、SSPH法を用いて、支配方程式を計算する際に、式(9)、(10)のマトリックスの逆行列を計算することになる。そのため、計算点が局所化した場合、行列式の値がゼロに近い状態や値が大きい場合に連立方程式を解くことができなくなってしまう。

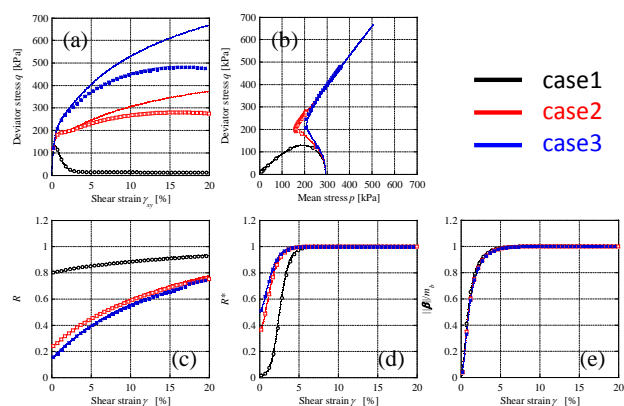


図4 解析結果 (SPH法)

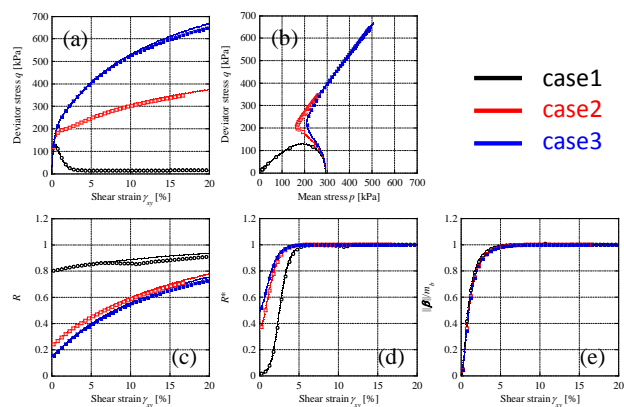


図5 解析結果 (SSPH法)

4. まとめ

本論文では、従来型SPH法と改良型手法(SSPH法)を用いて、弾性体および弾塑性体の単純せん断解析に適用し、両手法の精度を比較した。

- 弾性体の単純せん断解析について、今回新たに客観性のある速度として、Green-Nagdhi速度を導入した。SPH法では、計算点が不足する境界付近の影響で精度よく計算することができず、変形が進むにつれて理論解と差異が生じた。一方、SSPH法

では大変形領域でもある程度の精度で計算が可能であることが確認できた。

- 弾塑性体の単純せん断解析では、SYSカムクレイモデルを導入し、緩詰め状態から密詰め状態までの砂の挙動の表現を試みた。SPH法ではせん断中の過圧密、構造、異方性については理論解とほぼ一致したが、偏差応力については差異が生じた。SSPH法を用いることで、偏差応力についても精度よく求めることができた。ただし、計算が破綻してしまったケースも確認された。

以上のことから、SPH法と比較し、SSPH法は、高精度な解析手法であることがわかった。ただし、計算の安定性の観点からすると、改良の余地があることがわかった。そこで今後は、高精度かつより安定的に解析が行えるように検討してゆきたい。

参考文献

- 1) Lucy, L.B.: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astronomical Journal*, Vol.82, pp.1023-1024, 1977.
- 2) Gingold, R.A. and Monaghan, J.J.: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astron. Soc.*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977
- 3) Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y.: Particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, *Computational Fluid Dynamics Journal*, Vol.4, No.1, pp.29-46, 1995.
- 4) Batra, R.C. and Zhang, G.M.: SSPH basis functions for meshless methods, and comparison of solutions with strong and weak formulations, *Comput. Mech.*, Vol.41, pp.527-545, 2008.
- 5) Green, A.E. and Naghdi, P.M.: A general theory of an elastic-plastic continuum, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 18, pp.251-281, 1965.
- 6) Asaoka, A., Noda, T., Yamada, E., Kaneda, K. and Nakano, M.: An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils, *Soils and Foundations*, Vol.42, No.5, pp.47-57, 2002.
- 7) Liu, G.R. and Liu, M.B.: *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*, World Scientific, 2003.
- 8) Chen, J.K., Beraun, J.E. and Carney, T.C.: A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.46, pp.231-252, 1999.
- 9) Liu, M.B., Xie, W.P. and Liu, G.R.: Modeling incompressible flows using a finite particle method, *Appl. Math. Model.*, Vol.29, pp.1252-1270, 2005.
- 10) Zhang, G.M. and Batra, R.C.: Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems, *Computational Mechanics*, Vol.34, pp.137-146, 2004.
- 11) 邵阳, 山川貴大, 菊池貴博, 柴田和也, 越塚誠一: 陽的MPS法とHamiltonian MPS法を用いた3次元流体-構造連成解析手法の開発, *日本計算工学会論文集*, Vol. 2013, No.20130004, 2013.
- 12) Szabó, L. and Balla, M.: Comparison of some stress rates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, Issue 3, pp 279-297, 1989.
- 13) 野々山栄人, 中野正樹, 野田利弘: SPH法による地盤の掘削解析, *土木学会論文集 A2*, Vol.69, No.2, pp.I_341-I_350, 2013.
- 14) 中井健太郎: 構造・過圧密・異方性の発展則に基づく土の弾塑性構成式の開発とその粘土、砂、特殊土への適用性に関する基礎的研究, 名古屋大学博士学位論文, 2005.