

亀裂進展解析を用いた河川堤防盛土の分離破壊に関する研究

On a separation failure of a river dike by a crack extension analysis

新保泰輝¹, 矢富盟祥²

1 五大開発株式会社 技術研究所 shinbo@godai.co.jp

2 金沢大学 名誉教授

概要

河川堤防は地震によって堤防盛土天端や法面部分に複数の開口型やせん断型の亀裂を生じる事で非常に複雑な破壊形態を示す。特に液状化現象を伴う場合には盛土が開口亀裂によって短冊状に分離する特徴的な破壊形態を示す。このような河川堤防盛土の複雑な破壊形態の破壊メカニズムを解明するためには、盛土内にある亀裂の進展過程を考慮する必要がある。本論文では盛土が短冊状に分離する破壊形態の破壊メカニズムを解明するために、側方流動によって盛土底部に微小亀裂が発生したと仮定して亀裂進展解析を行った。その結果、盛土底部に発生した複数の亀裂が側方流動によって開口しながら地表面に向かって進展していく事で盛土が分離する破壊形態となる事を示した。

キーワード：河川堤防, X-FEM, 分離破壊, 亀裂進展解析

1. はじめに

2011年に発生した東北地方太平洋沖地震によって河川堤防には数多くの被害が発生した。東北地整管内では773箇所 of 堤防が被災しており、その内、「決壊・崩落」「陥没、沈下、亀裂」による被害は約6割を占めている¹⁾。河川堤防が決壊すると、河川水が越流し、堤内地に甚大な被害を生じるため、減災という観点において河川堤防の耐震対策は非常に重要な問題である。耐震対策を検討するためには、地震時に河川堤防に生じる破壊形態の破壊メカニズムを把握する必要がある。

地震被害を受けた河川堤防盛土には多くの亀裂が存在する。この亀裂を変形モード別に分類すると、図 1(a)に示すような開口型亀裂、図 1(b)に示すせん断型亀裂、それらを組み合わせた混合型亀裂の3種類になる。様々な種類の亀裂が盛土の至る所に生じる事で、河川堤防盛土は非常に複雑な破壊形態を示す^{1), 2)}。これらの亀裂は基礎地盤の液状化に伴う側方流動や地震中に天端や法面に引張応力が卓越する事で生じる^{3), 4)}。その長さは盛土の位置や盛土形状、盛土材料によって大きく異なる。特に液状化現象を伴う場合、図 2に示すような亀裂が盛土底部まで到達して盛土を短冊状に分離する破壊形態を示す事がある。

盛土が分離する事例は数多く存在する¹⁾。この破壊形態に至るメカニズムは、基礎地盤や盛土内に液状化現象が発生し、天端や法面に発生した開口亀裂(図 1(a))が側方流動によって進展して盛土底部まで達する事で発生すると考えられている¹⁾。しかし、この説明はどのような応力状

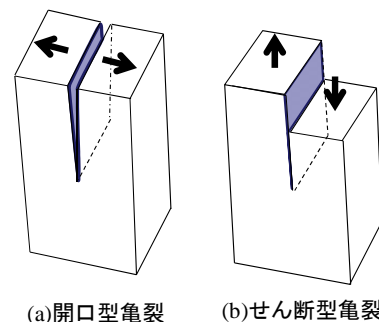


図 1 亀裂の変形モード

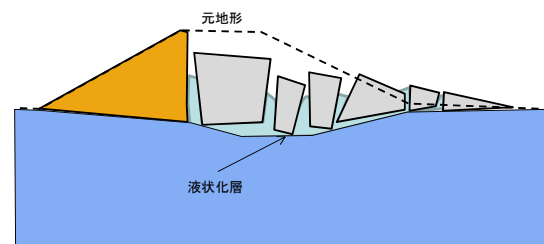


図 2 液状化に伴う河川堤防の分離破壊形態

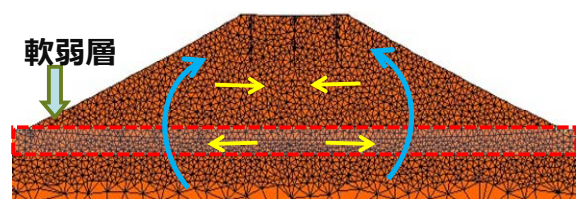


図 3 亀裂を有する河川堤防盛土の自重解析

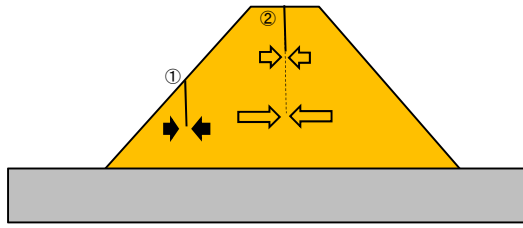


図4 亀裂先端への土圧による拘束効果

態で亀裂が進展するかを全く考慮していない。例えば、一様な基礎地盤に液状化が発生した場合、図3（詳細は後述する）に示すように、天端や法肩部は圧縮応力状態にあるため、亀裂面は閉口する。そのため、天端や法肩部に発生した亀裂が側方流動によって開口しながら進展して、河川堤防盛土を分離するとはいえない。

特に被災時に多くの亀裂を伴う河川堤防の破壊メカニズムを考究する上で、盛土内にある亀裂の進展過程を考慮した破壊力学による考察は必要不可欠である。

著者らは既報⁵⁾において、どのようにして開口亀裂が進展するかを検討するために、亀裂を考慮した河川堤防盛土の地震応答解析を行い、その亀裂進展可能性を検討した。その結果、地震時に法面に発生した亀裂（図4中①）は地震中に盛土底面に達する可能性がある事を示した。これは法面では土圧による拘束圧は小さい事から、地震によって亀裂が長くなった場合でも、亀裂先端近傍では引張応力状態となるためである。天端中央に発生した亀裂（図4中②）も同様に拘束圧は小さいが、この亀裂が長くなると土圧による拘束圧は大きくなる。そのため、振動中、亀裂先端前方は引張応力状態とはならず、圧縮応力状態になる。したがって、天端中央付近に発生した亀裂が開口しながら盛土底面にまで到達する可能性は低い⁵⁾。ただし、この事実は実際の被災事例において盛土底部まで到達しない、天端から数十cmの亀裂が生じる現象を説明している。

以上の検討により、法面に発生した亀裂は盛土底部に達する可能性は示された。しかし、本議論だけでは盛土中央付近が分離する現象を説明する事はできない。

また、著者らは基礎地盤や盛土内が液状化した場合を想定して盛土下部に弾性係数の小さい軟弱層を導入する事で液状化層を簡易に模擬し、自重解析を行った⁵⁾。この時、地震中に亀裂が生じたと仮定して、盛土天端に亀裂を挿入して解析を行った。その結果、側方流動によって盛土が変形する場合には図3に示す変形モードが発生し、天端や法肩付近の亀裂には圧縮応力が作用する事で亀裂面は閉口する事を示した。閉口した亀裂面がすべりを生じる場合には図1(b)に示すせん断破壊の可能性もある。実際に、河川堤防の地震時破壊形態の1つとして、液状化に伴うせん断破壊がある⁶⁾。しかし、前述したように図3に示すような盛土下部の基礎地盤に様な軟弱層が存在する場合には、天端付近では圧縮応力が卓越し、特にその亀裂先端では土圧による拘束圧が大きくなる。そのため、亀裂面は閉口するだけではなく、すべりを生じない固着状態となり、せん断破壊は発生しない。

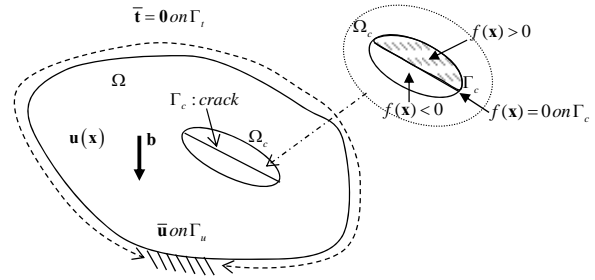


図5 解析領域の定義

一方、側方流動によって盛土底部には引張応力が作用している。一般に土の強度はせん断強度に対して引張強度の方が小さい。そのため、この時生じた引張応力により、盛土底部に微小亀裂が発生し、これが側方流動に伴い進展すると考えるべきである。

そこで、本論文では側方流動によって盛土底部に亀裂が形成されたと仮定して、X-FEMによる亀裂進展解析を行い、盛土が短冊状に分離する破壊形態の破壊メカニズムの解明を行う。

2. X-FEM の定式化

本論文では亀裂進展解析手法としてX-FEM⁷⁾を用いた。紙面の都合上、定式化において特に重要になる式のみを記載する。

今、図5に示すような連続体に外力として物体力が作用する問題を考える。図中の Ω は物体領域全体、 Ω_c は有限要素近似された亀裂を有する要素である。また、亀裂面 Γ_c に対して符号距離関数 $f(\mathbf{x})$ を与える。さらに $f(\mathbf{x}) > 0$ 方向の単位法線ベクトルを \mathbf{n}_c と置く。このとき、 $\boldsymbol{\sigma}$ を応力とし、物体力を \mathbf{b} とすると準静的な運動方程式は次式となる。

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega \quad (1)$$

また、 κ 、 μ をラメの定数とすると線形等方弾性体の構成式は次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{C}^e := \kappa \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (2)$$

ここで、物体境界 $\partial\Omega = \Gamma_t + \Gamma_c + \Gamma_u$ において変位境界条件 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u$ 、荷重境界条件 $\mathbf{t} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_t$ を考える。また、亀裂面上ではMohr-Coulomb型の摩擦則が成り立つとし、弾完全塑性接触摩擦モデルを用いている⁸⁾。亀裂面の相対変位を $\bar{\mathbf{u}}$ と置くと、亀裂面の境界条件は次式となる。

$$\mathbf{f}_c := \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_c & \text{if } \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_c = 0 \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_c \quad (3)$$

なお、亀裂面はめり込まない事から常に $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_c \geq 0$ である。

ここで、 \mathbf{d} を節点変位自由度、 $\hat{\mathbf{b}}$ を変位不連続を表す付加自由度、要素の節点数 num 、形状関数を $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ とし、亀裂先端近傍変位場の特異解を用いない場合には要素内変位-節点変位関係式は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{d} + \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{b}} \quad \text{on } \Omega / \Gamma_c \\ \Phi(\mathbf{x}) &:= \sum_{i=1}^{\text{num}} \Psi_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{N}(\mathbf{x}_i), \quad \Psi_i(\mathbf{x}) := H(f(\mathbf{x})) - H(f(\mathbf{x}_i)) \end{aligned} \quad (4)$$

またここで、 $\Phi(\mathbf{x})$ の空間微分を $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$ と置く。以上を用いて式(1)の弱形式の離散化を行い、非線形問題の解法としてNewton-Raphson法を用いると最終的に次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{b}_{n+1}^{k+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}} & \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{b}_{n+1}^{k+1}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} \\ \Delta \mathbf{b}_{n+1}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{int,k+1} \\ \mathbf{G}_{n+1}^{ext} - \mathbf{G}_{n+1}^{int,k+1} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{b}_{n+1}^{k+1}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \hat{\Phi} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1}} \mathbf{N} d\Gamma \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}} = \int_{\Omega_c} \hat{\Phi}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{b}_{n+1}^{k+1}} = \int_{\Omega_c} \hat{\Phi}^T \mathbf{D} \hat{\Phi} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \hat{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1}} \mathbf{N} d\Gamma \end{cases} \quad (7)$$

式(5)右辺のノルムが許容誤差以下となるまで収束計算を行う。ここで、 n は荷重ステップであり、 k は収束計算の繰返し回数を意味する。

3. 側方流動に伴う開口亀裂の進展解析

本章では、図6に示す河川堤防モデルを用いて亀裂進展解析を行う。分離破壊が発生する場合、分離した土塊自体の変形は小さいため、材料は線形等方弾性体と仮定した。ただし、亀裂面には摩擦係数、粘着力が存在している。解析に用いた材料パラメータを表1に示す。図7に解析に用いた有限要素メッシュを示す。三角形二次要素を用いて節点数41,271、要素数20,476とした。図8に河川堤防盛土内に亀裂が存在せず、自重のみが外力として作用している場合（以後、自重解析と呼ぶ）の σ_x の分布図を示す（以後記載している分布図は全て σ_x 分布である）。なお、正値が引張応力である。図8に示すように軟弱層の影響によって盛土が沈下し、法尻部分では隆起する変形モードが得られている。この時、図8点線内に示すように、盛土底面に引張応力 σ_x が作用していることから、引張応力により鉛直方向の微小亀裂が形成されたと仮定し、図9に示すように、初期亀裂を盛土底面中央に挿入した。初期亀裂長さは1.5mであり、堤防側に0.5m、軟弱層側に1mとした。

亀裂進展は、図10に示す極座標を用いて、亀裂先端からの距離 $r=0.2\text{m}$ で引張周応力 $\sigma_{\theta}(r,\theta)$ の最大値 $\sigma_{\theta}(r,\theta_{\max})$ が引張破壊強度 $\sigma_{\theta,f}=1.5\text{MPa}$ 以上となる場合に、 θ_{\max} 方向に発生すると仮定した。なお、議論を簡単にするために、地盤材料のせん断破壊強度は引張破壊強度に対して非常に大きいと考え、せん断破壊は発生しないとする。また、本解析では数値解析精度を考慮し、亀裂進展方向が ± 5 度程度となった場合には、みなし角として0度（直進）方向に亀裂が進展するとした。

図9の初期亀裂モデルにおける自重解析結果を図11に示す。また、図9に示す亀裂の上下先端近傍応力場を図12に示す。図12の縦軸は引張破壊強度 $\sigma_{\theta,f}=1.5\text{MPa}$ で

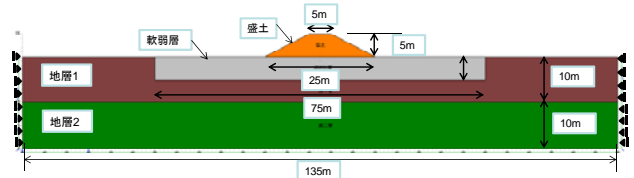


図6 解析モデル図

表1 材料パラメータ

	盛土	軟弱層	地層1	地層2
単位体積重量[kN/m ³]	17.07	18.54	18.54	20.6
弾性係数[kN/m ²]	88,000	150	150,000	738,000
ポアソン比[-]	0.258	0.33	0.33	0.33
亀裂面の摩擦係数[-]	0.1	0	-	-
亀裂面の粘着力[kN/m ²]	5	0	-	-

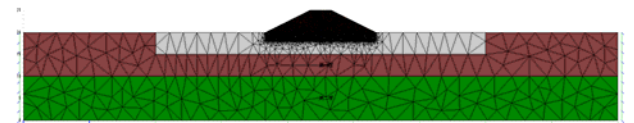


図7 解析メッシュ図

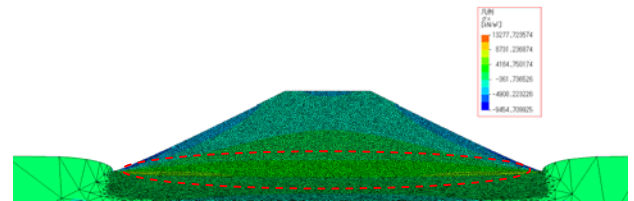


図8 盛土内に亀裂がないモデルの自重解析

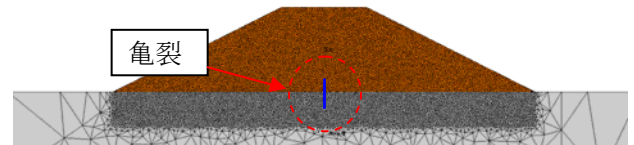


図9 初期亀裂モデル（拡大図）

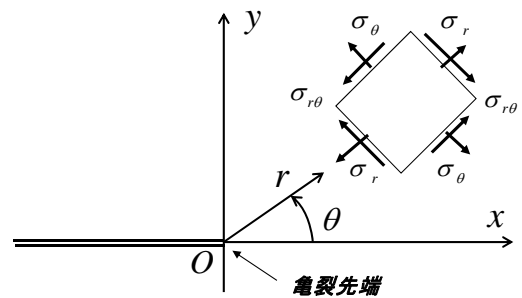


図10 亀裂先端を原点とした極座標

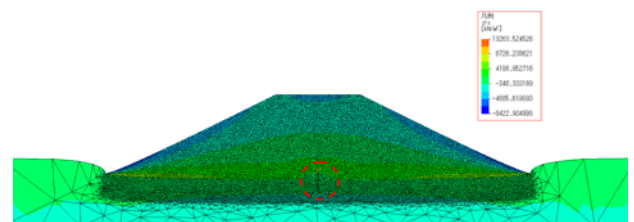
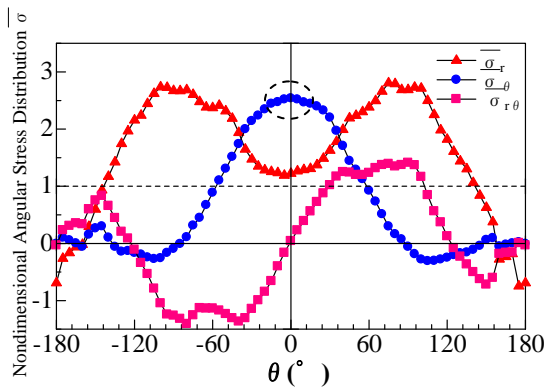
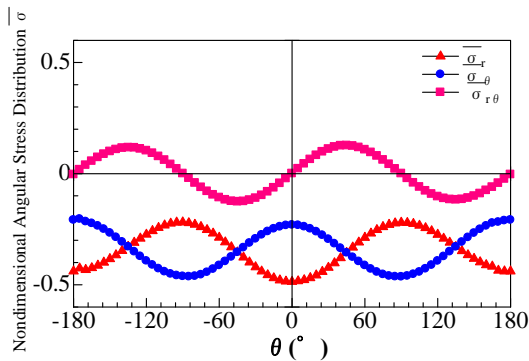


図11 初期亀裂モデルでの解析結果



(a) 上側亀裂先端 (鉛直方向上向きが0度)



(b) 下側亀裂先端 (鉛直方向下向きが0度)

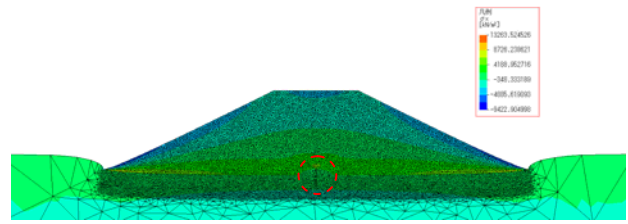
図 12 亀裂先端近傍応力場

除して無次元化した応力成分 $\bar{\sigma}$ を表示しており、 $\bar{\sigma}_\theta$ が 1 を超えると引張破壊となる。図 11 に示す σ_x 分布図は図 8 とほとんど違いは見られないが、亀裂先端近傍応力場を見ると、上側先端では亀裂が開いた事によって亀裂先端近傍に応力集中が発生し、図 12(a)に示すような典型的な開口型亀裂の応力分布を生じている。この時、亀裂先端近傍の引張周応力は亀裂が直進する方向(0度方向)に最大となっている。一方、軟弱層側では図 12(b)に示すように、周応力は全方向で圧縮を示している。この応力分布は均一圧縮応力状態であり、亀裂面は閉口している事を意味している。なお、極座標表示で振幅、振動数が等しく振動している場合は均一応力状態であることに注意したい。

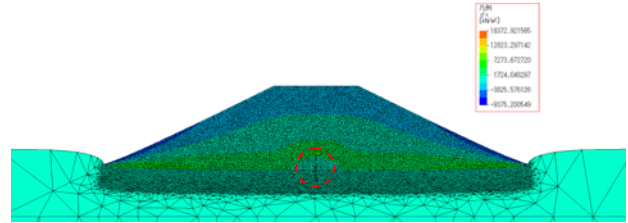
亀裂進展解析結果を図 13 に示す。亀裂は図 13(a)から徐々に盛土内をまっすぐに進展していき、最終的に盛土天端表面に到達する(図 13(f))。一方、軟弱層側の亀裂先端近傍は一貫して図 12(b)に示すような均一な圧縮応力状態を示し、亀裂進展は発生しない。

以上より、盛土底面に亀裂が形成された場合には、側方流動に伴って亀裂が開口しながら進展する事が判明した。

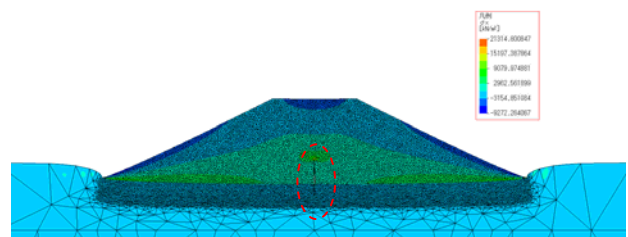
しかし、図 13(f)に示すように、盛土全体の変形モードを見ると、盛土中心に対して天端が沈み込むような変形モードとなっており、盛土が離れていくような短冊状の破壊形態とはいえない。



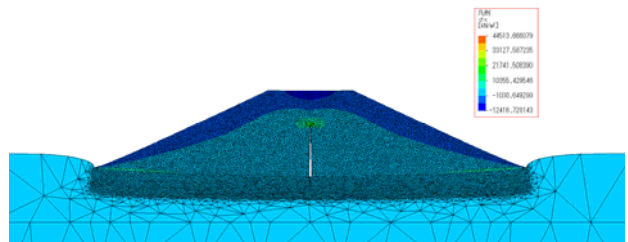
(a) 盛土側 亀裂長さ 50 cm (図 11 再掲)



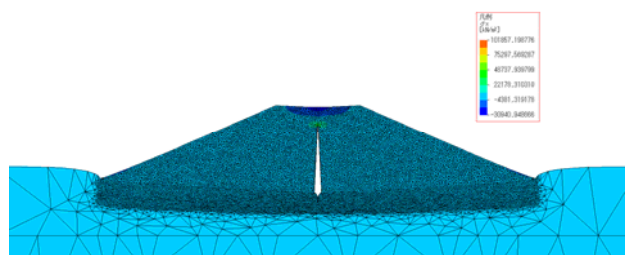
(b) 盛土側 亀裂長さ 1m



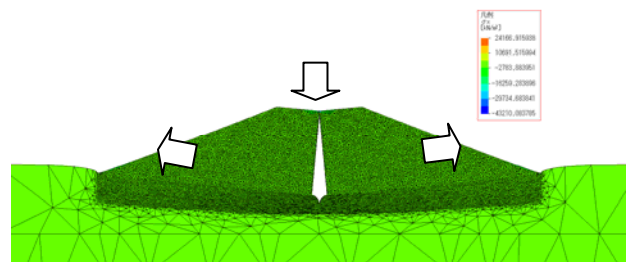
(c) 盛土側 亀裂長さ 1.5m



(d) 盛土側 亀裂長さ 3m



(e) 盛土側 亀裂長さ 4m



(f) 亀裂が盛土天端に到達
図 13 亀裂進展解析結果

4. 側方流動に伴う複数亀裂の進展解析

前章の解析結果より、1つの亀裂では、図2に示すような盛土が分離する破壊形態は得られない事が判明した。そこで、側方流動によって盛土底部に複数の亀裂が形成され、これが成長する事で盛土が複数に分断されると考え、複数亀裂による進展解析を行った。

本解析では、図14に示すように、盛土底部中央、盛土底部左側に盛土側0.5m、軟弱層側1mの亀裂の2本を挿入した。以後、それぞれ単に中央亀裂、左側亀裂と呼ぶ。その他、解析に用いたモデル、解析メッシュ、材料パラメータは前章と同じである。

図15に初期亀裂モデルにおける自重解析結果を示す。また、この時の両上側亀裂先端近傍の周応力分布を図16に示す。図16に示すように両亀裂上側先端近傍の最大周応力は亀裂がまっすぐ鉛直に進展する方向を示しており、 $\sigma_\theta = 1$ を超えている。また、その最大値は左側亀裂の方が大きい。これは、左側亀裂の方が中央亀裂に対して土圧による拘束圧は小さいためである。したがって、亀裂は左側亀裂から進展を開始する。

図17に左側亀裂が初期状態、進展中(詳細は後述する)、法面到達時における、中央亀裂の亀裂先端近傍周応力分布を示す。また、図18に亀裂進展解析結果を示す。

図17に示すように、左側亀裂の進展に伴って、中央亀裂の最大引張周応力が小さくなっている。これは、左側亀裂が進展することで応力再分配が発生したためである。すなわち、左側亀裂が進展中(図18(b))に開口する事で、中央亀裂は左側から圧縮され、拘束圧が大きくなり、引張周応力は小さくなったといえる。

また、左亀裂が法面到達時(図18(c))には、左側亀裂を境にして盛土が分離する。この時、分離した右側の盛土の左側亀裂面は反時計方向回りに少し傾いたまま沈下している。そのため、左側亀裂の下側先端近傍の軟弱層は変形が局所化し、結果として左側への側方流動は抑えられている。これにより、盛土底面に生じる引張応力は小さくなる。この影響は大きく、図17に示すように中央亀裂の最大引張周応力は初期状態に対して1/2程度まで小さくなっている。ただし、盛土右側の法尻部は隆起した状態、すなわち、盛土右側への側方流動は生じたままであるために中央亀裂は閉口する事なく、開口したままである。また、この時、最大引張周応力は引張破壊強度を超えている。したがって、左側亀裂が法面に到達した後に中央亀裂は進展を開始する。

図18(d)に示すように中央亀裂はまっすぐ上方に進展していき、最終的に天端へと到達し、図18(e)に示すような盛土が短冊状に分離する破壊形態となる。

図18(e)に示すように盛土天端中央付近に段差が生じている。これは、盛土の左側亀裂と中央亀裂に挟まれた部分が盛土全体から分離してブロック化した事で、その底部の傾きが自重によって水平となり、反時計回りに傾いている

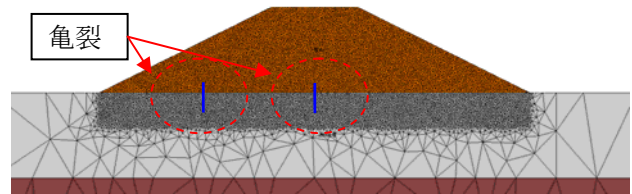


図14 複数初期亀裂モデル (拡大図)

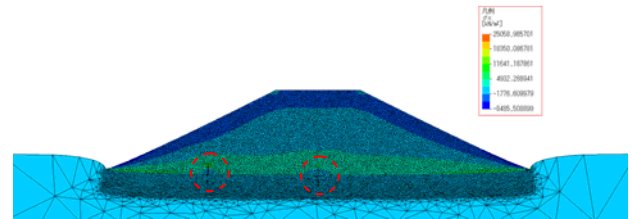


図15 複数初期亀裂モデルでの自重解析結果

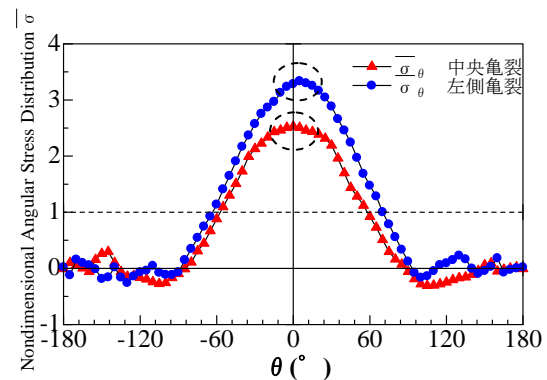


図16 初期状態における両亀裂上側先端近傍周応力分布

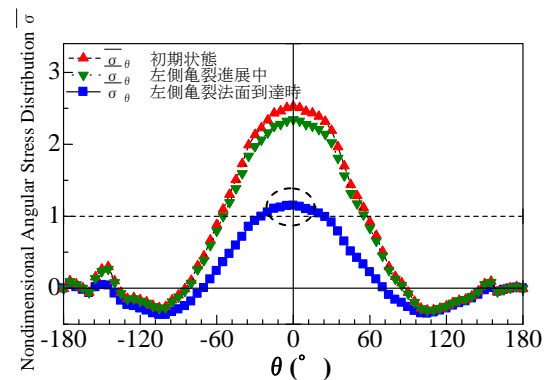


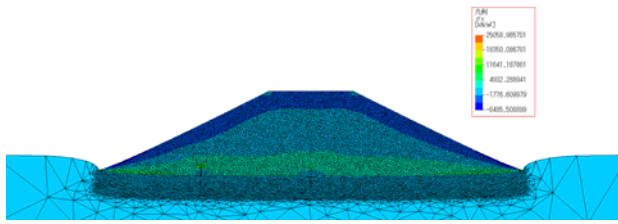
図17 左亀裂進展時の中央亀裂上側先端近傍周応力分布

盛土右側部分との間に変位差を生じたためである。

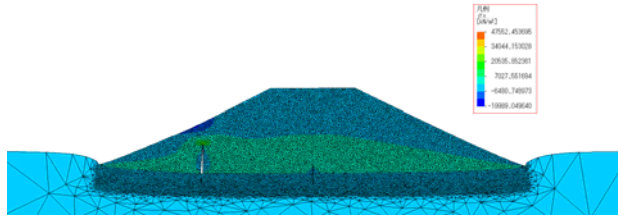
以上の解析結果より、河川堤防盛土が分離するような短冊状の破壊形態は、河川堤防盛土下部の基礎地盤が側方流動を生じる事で盛土底部にいくつかの微小亀裂を形成し、この亀裂が側方流動に伴い開口しながら進展し、法面や天端に到達することで生じる事が分かった。

5. まとめ

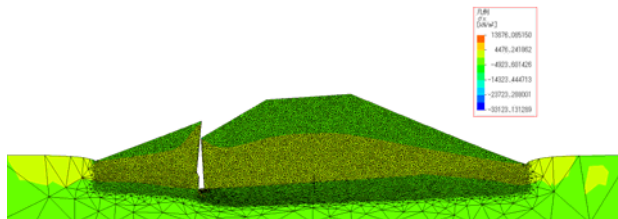
本論文では、地震時に河川堤防盛土に発生する盛土が短冊状に分離する破壊形態の破壊メカニズムを解明するた



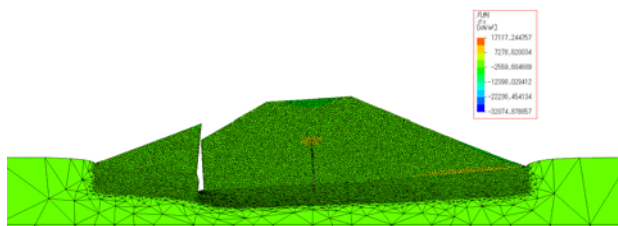
(a) 初期状態 (図 15 再掲)



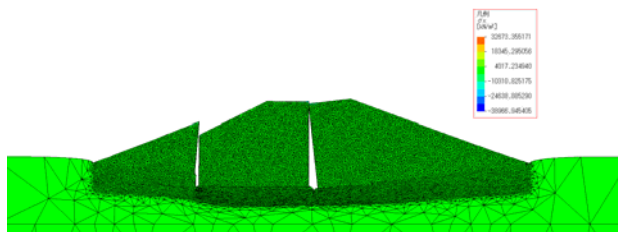
(b) 左側亀裂が進展



(c) 左側亀裂が法面に到達



(d) 中央亀裂が進展



(e) 中央亀裂が天端に到達

図 18 複数亀裂の亀裂進展解析結果

めに、側方流動に伴って盛土底部に亀裂が生じたと仮定して亀裂進展解析を行った。その結果、以下の事を示した。

○ 盛土底部に発生した亀裂の亀裂先端近傍応力場は典型的な開口型亀裂の応力分布を示し、亀裂進展方向は鉛直上向きである事が判明した。これにより、亀裂は開口しながら盛土中をまっすぐに進展していき、天端へと到達する

事が分かった。

○ 複数亀裂(盛土底部中央、左側)の発生を考慮した場合、拘束圧の小さい盛土左側から亀裂は進展する。このとき左側亀裂が進展する事で応力再配分が発生し、中央側の亀裂の最大引張周応力は小さくなることを示した。

○ 左側亀裂が法面に到達後、中央亀裂が進展を開始する。この中央亀裂が盛土天端に達する事で、河川堤防盛土が短冊状に分離される破壊形態が生じる事を示した。

今後は、液状化領域の位置によって引張破壊、せん断破壊のどちらが発生するかを検討する事で引張破壊とせん断破壊を含めた統合的な河川堤防盛土の破壊メカニズムの解明を行う。

謝辞

本稿は、地盤工学会東日本大震災対応調査研究委員会「地盤変状メカニズム研究委員会(委員長:浅岡顕)」河川堤防ワーキンググループ(リーダー:小高猛司)に関連する研究報告である。WGメンバーには多くのご意見を頂きました。ここに記して感謝します。

参考文献

- 1) 財団法人国土技術センター:北上川等堤防復旧技術検討会報告書, <http://www.thr.mlit.go.jp/>, 2014年3月12日取得。
- 2) 財団法人国土技術センター:河川土工マニュアル,平成21年4月, <http://www.jice.or.jp/>, 2014年3月12日取得。
- 3) 余川弘至, 田辺 晶規, 八嶋厚, 杉戸真太, 沢田和秀, 久世益充, 中山修, 星加泰央:地震動の加速度振幅と継続時間が河川堤防の変形に及ぼす影響, 日本地震工学会論文集 Vol. 9, No.5, 5_1-5_20, 2009。
- 4) 中田光彦, 澤田純男, 後藤浩之, 吉田望, 飛田善雄:引張破壊を考慮した液状化地盤上における盛土の地震時破壊性状に関する研究, 第47回地盤工学研究発表会, 2012。
- 5) 川瀬貴文, 新保泰輝, 鈴木達也, 矢富盟祥:動的 X-FEM を用いた引張亀裂を有する盛土の地震時破壊形態に関する基礎的研究, 第48回地盤工学研究発表会, 2013。
- 6) Sasaki, Y., Moriwaki, T. and Ohbayashi, J.: Deformation process of an embankment resting on a liquefiable soil layer, Deformation and progressive failure in geomechanics, Proc. IS-Nagoya'97, pp.553-558, 1997
- 7) Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., Zi, G.: Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.58, pp.1873-1905, 2003.
- 8) 李炳奇, 矢富盟祥:陰解法リターンマップ手法を用いた圧縮荷重下におけるき裂先端近傍場の X-FEM 解析, 応用力学論文集, Vol.8, pp. 461-470, 2005.