斜面安定評価手法としての SPH 法の可能性

Possibility of SPH method for slope stability analysis

野々山栄人 [1]，沢田和秀 [2]，森口周二 [3]，八嶋厚 [4]

1　名古屋大学・工学研究科・nonoyama@civil.nagoya-u.ac.jp
2　岐阜大学・流域圏科学研究センター
3　岐阜大学・工学部
4　岐阜大学

概　　要

斜面の安定問題に関して，実務レベルでは，円弧すべり計算により得られる安全率を用いて対策工の検討や設計が行われている。また，変形を考慮できない円弧すべり計算に代わり，有限要素法を用いた検討も行われるようになってきたが，斜面が崩壊した後の大変形問題を取り扱うことは困難であり，再現できる変形量には制限がある。このような背景のもと，本稿では，地盤材料の構成式に基づいて，大変形問題を取り扱うことができる SPH 法を斜面安定問題に適用し，斜面安定評価手法としての可能性について検証する。まず，地盤材料の変形挙動を表現するために，SPH 法に地盤材料の構成式を導入した。その検証として，単純せん断解析を実施した。得られた結果を理論解と比較した結果，精度よく地盤材料の応力状態が表現できることを確認した。次に，SPH 法を用いて斜面安定解析を行い，円弧すべり計算より得られる安全率の評価結果との比較を行い，SPH 法が斜面の安定問題に対して有益な評価手法であることを示した。

キーワード：斜面安定，SPH 法，構成式

1.　はじめに

斜面の安定問題に関して，実務レベルでは，円弧すべり計算より得られる安全率を用いて，対策工の検討や設計が行われている。円弧すべり計算は，力のつり合いから容易に斜面の安全率を求めることができる反面，斜面の変形を考慮できないという短所を合わせ持っている。斜面の変形を予測することができれば，より詳細な対策工の検討や設計につながると期待できる。そのため，現在では，地盤材料の構成式を導入した有限要素法(FEM)を用いて，変形を考慮した検討も行われるようになった。しかしながら，FEM では，解析メッシュが大きく変形した場合に，解の精度低下が生じるため，変形がおおきくなる問題を取り扱うことは困難であり，再現できる変形量には制限がある。

近年，地盤の大変形問題を解くために，様々な解析手法が提案されている。例えば，地盤材料を一相系の Bingham 流体と仮定して解く方法[1)]や，地盤材料を離散体と仮定して解く方法[2)]がある。前者は，Euler 型の解析手法[3)]を用いており，メッシュの変形を考慮する必要がないため，大変形問題を解くことが可能である。しかし，地盤材料を一相系の流体と仮定しており，複雑な変形挙動を示す地盤材料を表現するには限界がある。後者は，地盤材料を離散体と仮定しているため，容易に地盤の大変形を表現することができる。しかし，離散体モデルに基づいた解析手法であるため，これまで地盤工学で開発・高度化された連続体力学に基づく構成式を導入することができない。また，現場や室内試験で得られるパラメータを直接入力値として使用することができず，地盤材料の変形挙動を再現するために，解析パラメータの決定に試行錯誤が必要となる。

このような背景のもと，本研究では，地盤の大変形挙動を連続体力学の構成式の枠組みで表現することを目的とする。そこで，様々な分野で大変形問題に対する有効性が確認されている SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法[4),5)]を用いる。SPH 法は，Lagrange 型のメッシュフリー解析手法であるため，メッシュの変形による解の精度低下に悩まされることなく大変形問題を解くことができる解析手法である。本稿では，地盤材料の構成式を導入した SPH 法の検証として，単純せん断解析を実施し，せん断応力ーせん断ひずみ関係および応力経路について，得られた解析結果と理論解を比較した。次に，斜面の安定解析を実施し，Fellenius 法により得られる安全率を用いた評価結果と比較した。また，対策工を考慮した斜面の安定解析についても実施した。以上の一連の解析から，斜面安定評価手法としての SPH 法の可能性について検討する。

2. 数値解析手法

2.1 SPH 法

SPH 法では，粒子の集合体として物体を表現するが，粒子の運動を単に孤立した粒子の運動として扱うと，本来の連続体としての挙動と大きな差が現れてしまう。そこで，平滑化近似(Kernel approximation)と粒子近似(Particle approximation)の 2 段階の補間理論を用いて，連続体の運動を表現する。まず，1 段階目の平滑化近似では，評価点粒子αの位置 x^αにおける物理量$\langle f(x^\alpha)\rangle$は，平滑化関数 W を用いて，各評価点粒子周りに物理量の分布を仮定する。ここで，平滑化関数は，Gauss 関数のような釣り鐘型の関数であり，本研究では 3 次スプライン関数[6]を用いた。平滑化関数の値は，平滑化領域内の評価点粒子αから周辺粒子βの距離 $r=|x^\alpha-x^\beta|$と影響半径 h によって決定される。山括弧〈 〉は補間された物理量を示している。

$$\begin{aligned}\langle f(x^\alpha)\rangle &= \int_\Omega f(x^\beta)W(x^\alpha - x^\beta, h)dx^\beta \\ &= \int_\Omega f(x^\beta)W(r,h)dx^\beta\end{aligned} \tag{1}$$

図 1 に示すように，評価点粒子と周辺粒子を含む空間の体積は領域Ωの積分で表現する。

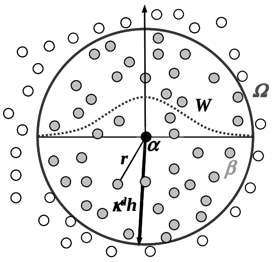


図 1 SPH 法のイメージ図

平滑化関数は，次の 3 つの性質を満たす必要がある。

1) 正規化条件

$$\int_\Omega W(r,h)dx^\beta = 1 \tag{2}$$

2) 極限がデルタ関数δ

$$\lim_{h\to 0} W(r,h) = \delta(r) \tag{3}$$

3) コンパクト条件

$$\lim_{h\to 0} W(r,h) = 0 \quad when \ \left|x^\alpha - x^\beta\right| > \kappa^d h \tag{4}$$

ここで，$\kappa^d h$ は平滑化領域(Support domain)の半径であり，平滑化領域の半径を決定するパラメータκ^d に影響半径 h を掛けたものである。

次に，2 段階目の粒子近似では，各粒子の周りに仮定した物理量の分布を重ね合わせて，評価点粒子αの物理量$\langle f(x^\alpha)\rangle$を表現する(図 2)。よって，物理量$\langle f(x^\alpha)\rangle$は，$N$ 個の離散点の物理量によって表現すると考えることができる。ここで，周辺粒子βの体積 dx^βを質量 m^β, 密度ρ^βで表すと，

$$dx^\beta = \frac{m^\beta}{\rho^\beta} \tag{5}$$

となる。上式を用いて式(1)を変形すると，以下の式が得られる。

$$\langle f(x^\alpha)\rangle = \sum_\beta^N \frac{m^\beta}{\rho^\beta} f(x^\beta)W(r,h) = \sum_\beta^N \frac{m^\beta}{\rho^\beta} f(x^\beta)W^{\alpha\beta} \tag{6}$$

ここで，$W^{\alpha\beta}$は，周辺粒子βから評価点粒子αへの寄与を表す平滑化関数を示している。上式が SPH 法の物理量の評価式である。

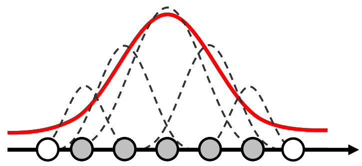


図 2 物理量の重ね合わせ

物理量の空間勾配については，平滑化関数の空間勾配を用いることによって同様に近似することができる。以下に SPH 法の物理量の空間勾配の評価式を示す。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\langle f(x^\alpha)\rangle}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_\Omega f(x^\beta)W(x^\alpha - x^\beta, h)dx^\beta \\ &= \int_\Omega f(x^\beta)\frac{\partial W(r,h)}{\partial x_i}dx^\beta \\ &= \int_\Omega f(x^\beta)\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i}dx^\beta \\ &= \sum_\beta^N \frac{m^\beta}{\rho^\beta} f(x^\beta)\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{7}$$

さらに，上式は，微分操作により次式に変換することができる。

$$\frac{\partial\langle f(x^\alpha)\rangle}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho^\alpha}\sum_\beta^N m^\beta\left(f(x^\beta) - f(x^\alpha)\right)\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i} \tag{8}$$

$$\frac{\partial\langle f(x^\alpha)\rangle}{\partial x_i} = \rho^\alpha\sum_\beta^N m^\beta\left(\frac{f(x^\alpha)}{(\rho^\alpha)^2} + \frac{f(x^\beta)}{(\rho^\beta)^2}\right)\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i} \tag{9}$$

2.2 固体力学に基づく SPH 法

以下に，連続体力学に基づく支配方程式である質量保存則と運動量保存則をそれぞれ示す。

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{10}$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \tag{11}$$

ここで，u_iは速度ベクトル，σ_{ij}は応力テンソル，F_iは外力ベクトルである。SPH 法の空間勾配の評価式である式(8), (9)を用いて式(10), (11)をそれぞれ離散化することで，SPH 法における質量保存則，運動量保存則が得られる。

$$\frac{d\rho^\alpha}{dt} = \sum_\beta^N m^\beta\left(u_i^\alpha - u_i^\beta\right)\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i} \tag{12}$$

$$\frac{du_i^\alpha}{dt} = \sum_\beta^N m^\beta\left(\frac{\sigma_{ij}^\alpha}{(\rho^\alpha)^2} + \frac{\sigma_{ij}^\beta}{(\rho^\beta)^2} + C_{ij}^{\alpha\beta}\right)\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_j} + F_i^\alpha \tag{13}$$

ここで，$C_{ij}^{\alpha\beta}$ は，人工粘性[7]と人工応力[8]の和であり，次式で表される。

$$C_{ij}^{\alpha\beta} = -\delta_{ij}\Pi_i + \left(R_{ij}^{\alpha} + R_{ij}^{\beta}\right)\left(f^{\alpha\beta}\right)^{n^{AS}} \tag{14}$$

ここで，Π_i は人工粘性ベクトル，R_{ij}^{α} および R_{ij}^{β} は人工応力テンソル，$f^{\alpha\beta}$ は反発力，n^{AS} は人工応力パラメータである。人工粘性および人工応力を導入することで，数値振動および Tensile instability[9]を抑制することができる。この Tensile instability とは，固体力学に基づく SPH 法特有の問題であり，応力が引張状態になると，解が不安定になる問題である。

地盤材料の変形挙動を表現するために，本研究では，Drucker-Prager モデル[10]，Cam-clay モデル[11]および修正 Cam-clay モデル[12]の 3 種類の構成式を導入する。

3. 解析結果

3.1 弾塑性体の単純せん断解析

SPH 法を用いて地盤材料の変形挙動を表現するために，地盤材料の構成式を導入する。その検証として，非排水条件下での弾塑性体の単純せん断解析を実施し，変形時の応力やひずみについて理論解と比較を行った。SPH 法に導入した構成式は Drucker-Prager モデル，Cam-clay モデルおよび修正 Cam-clay モデルの 3 種類である。図 3 は，用いた解析モデルであり，解析対象領域は正方形物体(10cm×10cm)である。本研究では，解析対象領域の周りに仮想領域を設定した。ここで，仮想領域とは，解析の精度を向上させるために，解析対象領域の周りに仮想粒子を配置した解析領域である。仮想領域には次式から求められる速度 v_x を用いて x 方向に強制変位を与えた。

$$v_x = 0.10y\,[\mathrm{cm/s}] \tag{15}$$

ここで，y は，図 3 に示す解析対象領域および仮想領域における図心軸からの距離である。ただし，このような操作は単純せん断のように，変形が予めわかっている場合にのみ適用できる。図中の実線は物体の初期形状であり，破線は変形後の形状である。図中の解析対象領域の中心で，応力およびひずみを算出する。解析に用いた材料パラメータを表 1 に示す。表 1 に示すように，Case1 では粘着力，Case2 および 3 では初期等方応力を変えてそれぞれ 3 種類の解析を行った。なお，本解析では，間隙水圧の影響を考慮していない。

図 4～6 に各ケースのせん断応力－せん断ひずみ関係および応力経路をそれぞれ示す。図中の点線が理論解であり，プロットが解析解である。Case2 および Case3 では，限界状態線(C.S.L.)も図中に示している。図 4～6 に示すように，SPH 法で得られた解析結果は，理論解と一致していることが確認できる。このことからも，SPH 法は地盤材料の構成式を高精度に表現できることが確認できた。

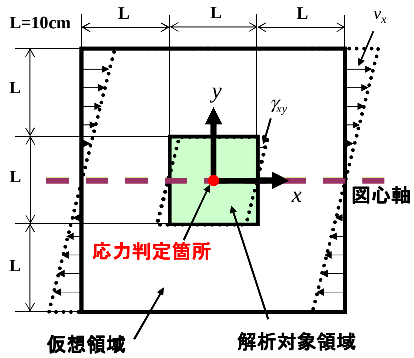
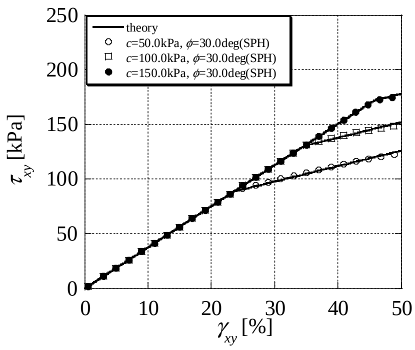


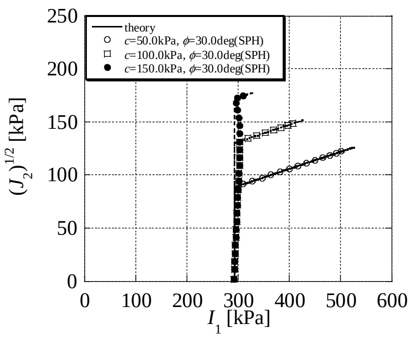
図 3　解析モデル

表 1　表　材料パラメータ

Case		1	2	3
構成式		Drucker–Prager	Cam-clay	Modified Cam-clay
ヤング率	E [kPa]	1000.0	-	
ポアソン比	ν	0.33		
粘着力	c [kPa]	50.0,100.0, 150.0	-	
内部摩擦角	ϕ [deg]	30.0	-	
圧縮指数	λ	-	0.355	
膨張指数	κ	-	0.0477	
初期間隙比	e_0	-	2.0	
破壊時の応力比	M	-	1.45	
圧密降伏応力	p_c [kPa]	-	98.0,196.0,294.0	
初期等方応力	p_0 [kPa]	98.0		

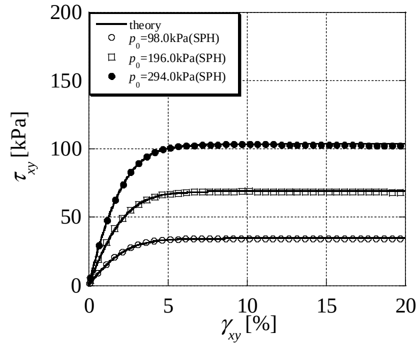


(a)せん断応力－せん断ひずみ関係

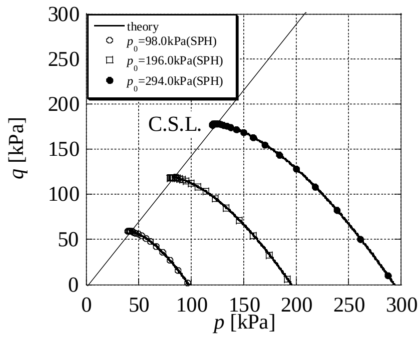


(b)応力経路

図 4　Drucker-Prager モデル

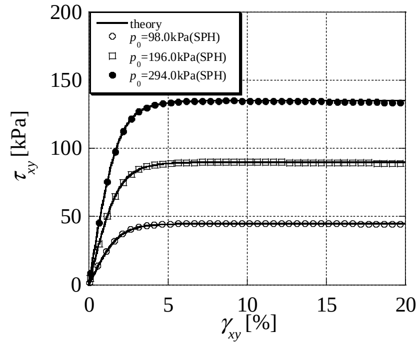


(a)せん断応力ーせん断ひずみ関係

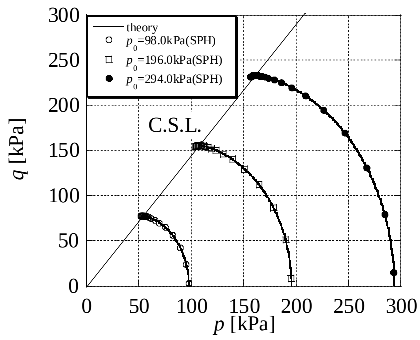


(b)応力経路

図 5　Cam-clay モデル



(a)せん断応力ーせん断ひずみ関係

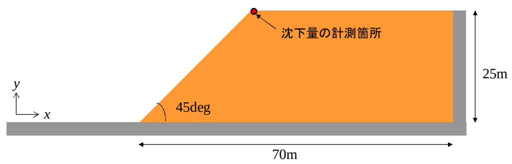


(b)応力経路

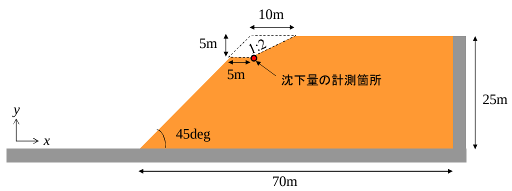
図 6　修正 Cam-clay モデル

3.2　斜面の安定解析

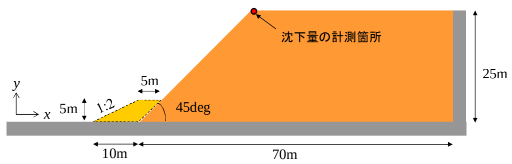
SPH 法を用いて，斜面の安定解析を実施し，Fellenius 法で得られた安全率による評価結果との比較を行う。本解析では，斜面角度 45 度，斜面高さ 25m，均質な $c\phi$材料で構成される斜面に対し，粘着力を変化させて解析(Case1～4)を行い，粘着力の違いによる変形挙動と安全率の関係に着目した。次に，上記の解析を無対策とし，それに対して，対策工の効果を検討するために，最も安全率の低い斜面(Case4)を対象として，対策工を想定した解析を行った。検討した対策工は，上部排土工(Case5)，押え盛土工(Case6)，および上部排土工と押え盛土工の両工法併用(Case7)の 3 種類である。解析で用いた各ケースの解析モデルを図 7 に示す。評価対象として，のり肩の沈下量に着目した。表 2 に材料パラメータを示す。表 3 に各ケースでの粘着力と，Fellenius 法により得られた安全率，および対策工の種類を示す。安全率の算出には，円弧すべり安定解析ソフト[13)]を用いた。境界条件は，斜面の側面を水平方向固定，鉛直方向をフリーとし，底部は水平・鉛直方向ともに固定した。押え盛土工と上部排土工の勾配は，ともに高さ 5m の 2 割勾配とした。押え盛土部分の内部摩擦角は，転圧の効果を考慮して，30 度とした。間隙水の影響については，本解析では考慮していない。また，初期応力には土被り圧に対応する等方応力を与えた。



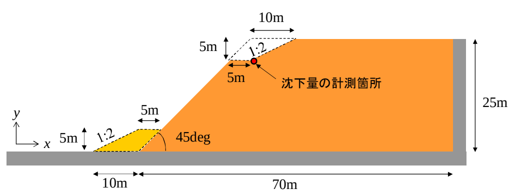
(a)無対策(Case1~Case4)



(b)上部排土工(Case5)



(c)押え盛土工(Case6)



(d)両工法併用(Case7)

図 7　解析モデル

表 2　材料パラメータ

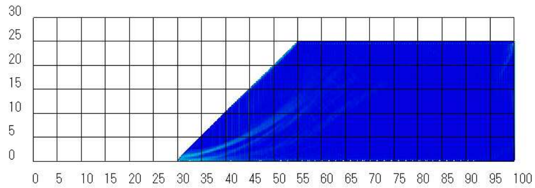
材料		cφ材料
ヤング率	E [kPa]	100,000.0
ポアソン比	ν	0.30
内部摩擦角	ϕ [deg]	20.0
粘着力	c [kPa]	50, 40, 30, 20
単位体積重量	γ[kN/m^3]	19.6
ダイレタンシー角	ψ [deg]	1.0

表 3　対策工の種類，粘着力および安全率

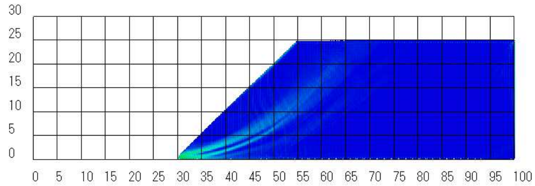
Case	対策工	粘着力 c[kPa]	安全率 Fs
1	無対策	50	1.13
2		40	1.01
3		30	0.88
4		20	0.75
5	上部排土工		0.82
6	押え盛土工		0.82
7	両工法併用		0.92

図 8 に，各ケースの変形解析終了時の最大せん断ひずみ($\gamma_{max}=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2$)の分布を示す。図 9 に各ケースで得られたのり肩の沈下量の時刻歴を示す。図 8(a), (b)に示すように，Case1 および Case2 の無対策で安全率が 1.0 以上の場合，円弧上のせん断ひずみが卓越した領域は僅かであり，変形はほとんどしていない。一方，図 8(c)，(d)に示すように，Case3 および Case4 の安全率が 1.0 を下回った場合，明確な円弧状のせん断ひずみ分布が確認できる。Case3 では，明確なひずみは確認できるものの，ほとんど変形していない。Case4 では，のり先破壊が生じ，剛体的な滑りが確認できる。また，Case4 のように，斜面が大変形しても，計算は破たんすることはなかった。図 9(a)に示すように，のり肩の沈下量の時刻歴から，安全率の増加にともない沈下量は小さくなることが確認できる。また，各ケースの沈下量は，時間の経過にともなって，収束していることも確認できる。これらの結果より，SPH 法は既存の安全率照査と同様の傾向を得ることができることがわかる。

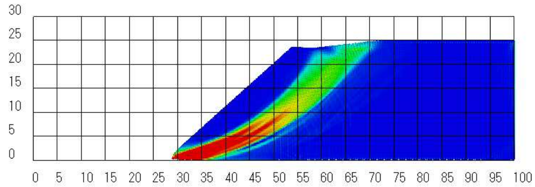
次に対策工を考慮した場合，Fellenius 法で得られた安全率は，表 3 に示すように，上部排土工を想定した Case5 と押え盛土工を想定した Case6 で同じ値が得られた。一方，SPH 法で得られた解析結果では，Case5 では，明確な円弧上のせん断ひずみの卓越が確認でき，斜面も大きく変形したが，同じ安全率の Case6 では，斜面はほとんど変形しなかった。これは，円弧すべり計算で算出される安全率は，力のつり合いから求められるため，変形を考慮していないが，SPH 法では，変形を考慮しているため，このような違いが生じたと考えられる。また，図 9(b)に示すように，対策工の効果としては，無対策では大きく斜面が変形したが，対策工を想定することで沈下量を抑制することができた。このことからも，SPH 法は対策工を考慮した場合でも安定性を評価できると言える。以上の解析結果から，SPH 法は変形と安定性を同時に評価でき，大変形領域においても，計算が破たんすることなく連続的な評価が可能である。よって，SPH 法は斜面安定問題に対して，十分適用可能であり，有益な情報を提供できると考えられる。



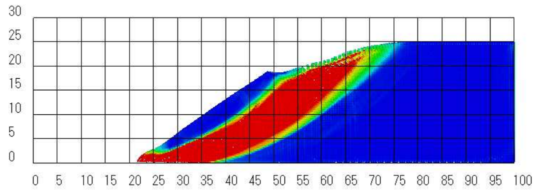
(a)Case1 (Fs=1.13，無対策)



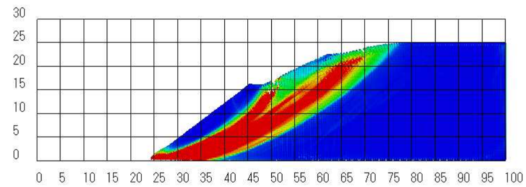
(b)Case2 (Fs=1.01，無対策)



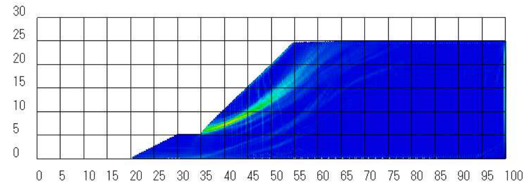
(c)Case3 (Fs=0.88，無対策)



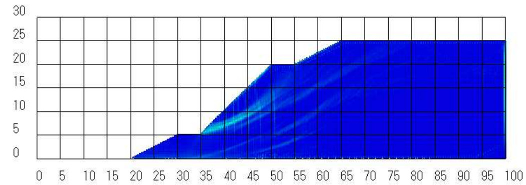
(d)Case4 (Fs=0.75，無対策)



(e)Case5 (Fs=0.82，上部排土工)



(f)Case6 (Fs=0.82，押え盛土工)



(g)Case7 (Fs=0.92，両工法併用)

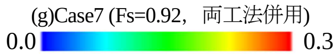
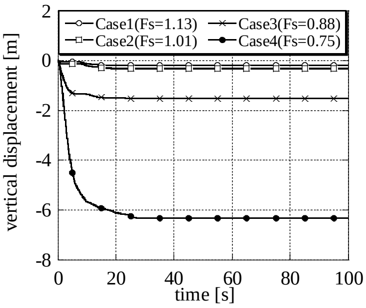
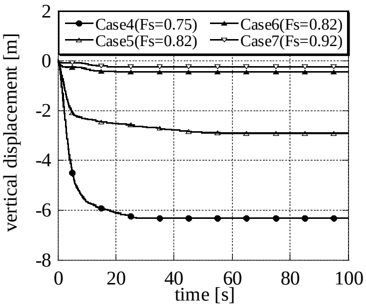


図 8　最大せん断ひずみの分布



(a)Case1 ~ Case4



(b)Case4 ~ Case7

図 9　のり肩の沈下量の時刻歴

4. 結論

本研究では，斜面安定評価における SPH 法の可能性について検討を行った。まず，地盤材料の構成式を SPH 法に導入し，単純せん断解析を実施した。得られた解析結果と理論解を比較し，解析手法の精度検証を行った。その後，斜面の安定解析を実施した。本研究で得られた知見を以下にまとめる。

- 単純せん断解析結果から，SPH 法は地盤材料の構成式を高精度に表現できることが確認できた。
- 斜面の安定解析結果から，安全率 1.0 以上では，ほとんど変形が見られないが，安全率 1.0 を下回ると，斜面が大きく変形した。SPH 法は実務で広く用いられている円弧すべり法による安全率照査と同様の傾向を得ることができる。
- 対策工を考慮した斜面の安定解析結果から，対策工を考慮することで変形量を抑制することができた。SPH 法では，地盤の変形を考慮しつつ，対策工の効果とその安定性を評価することができる。
- 一連の解析結果から，SPH 法は斜面安定評価手法として十分適用可能であり，有益な情報を提供できると考えられる。

今後は，二相混合体理論を導入して，地下水の影響を考慮した地盤での安定解析や地震時の安定解析を試みる。また，複雑な変形挙動を示す地盤材料を表現するために，SYS カムクレイモデル[14]の導入を試みる。

参 考 文 献

1) Moriguchi, S., CIP-based numerical analysis for large deformation of geomaterials, Ph.D. Dissertation, Gifu University, Japan, 2005.
2) Cudall, P.A. and Strack, O.D.L., A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, Vol.29, No.1, pp.47-65, 1979.
3) Yabe, T., Ishikawa, T., Wang, P.Y., Aoki, T., Kadota, Y. and Ikeda, F., A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, One-dimensional solver, two- and three-dimensional solvers, Computer physics communications, Vol.66, pp. 219-242, 1991.
4) Lucy, L.B., A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, Astron. J., Vol. 82, pp. 1023-1024, 1977.
5) Gingold, R.A. and Monaghan, J.J., Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, Monthly Notices of the Royal Astron. Soc., Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
6) Swegle, J.W., Attaway, S.W., Heinstein, M.W. and Mello, F.J., An analysis of smoothed particle hydrodynamics, SAND93-2513, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 1994.
7) Monaghan, J.J. and Gingold, R.A., Shock simulation by the particle method SPH, J. of Comput. Phys., Vol.52, pp.374-389, 1983.
8) Gray, J.P., Monaghan, J.J. and Swift, R.P., SPH elastic dynamics, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.190, pp.6641-6662, 2001.
9) Swegle, J.W., Hicks, D.L. and Attaway S.W., Smoothed particle hydrodynamics stability analysis, J. of Comput. Phys, Vol.116, No.1, pp.123-134, 1995.
10) Drucker, D.C. and Prager, W., Soil mechanics and plastic analysis for limit design, Quart. Appl. Math., Vol.10, No.2, pp.157-165, 1952.
11) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A., Yielding of clay in states wetter than critical, Geotechnique, Vol.13, No.3, pp.211-240, 1963.
12) Roscoe, K. H. and Burland, J. B., On the generalized stress strain behavior of 'wet' clay, Engineering Plasticity, Cambridge University Press, pp.535-609, 1968.
13) 篠田昌弘, User's Manual, 鉄道総合技術研究所, 2008.
14) Asaoka, A., Noda, T., Yamada, E., Kaneda K. and Nakano, M., An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils, Soils and Foundations, Vol.42, No.5, pp.47-57, 2002.