

# 地盤材料の直接的モデル化に基づく透水シミュレーション

森口周二<sup>1</sup>, 沢田和秀<sup>2</sup>, 八嶋厚<sup>3</sup>, 花北誠<sup>4</sup>

1 岐阜大学・工学部社会基盤工学科・smori33@gifu-u.ac.jp

2 岐阜大学・流域圏科学研究センター

3 岐阜大学

4 岐阜大学大学院・工学研究科社会基盤工学専攻

## 概要

近年の地盤工学においては、土粒子レベルの運動メカニズムの解明が連続体としての挙動を説明する有力な情報となることが報告されている。土粒子レベルの挙動の再現には、個別要素法が広く用いられているが、間隙水の影響を考慮することが難しいため、水の挙動が支配的となる現象についてはその再現に限界がある。しかしながら、土粒子と間隙流体の挙動を直接的に再現することができれば、液状化、締固め、不飽和土の挙動など、未だメカニズム解明が十分でない問題に対して新たなアプローチが可能となる。本研究では、粒子と流体の連成解析による地盤材料の直接計算手法の有効性を検証するために、地盤材料の透水挙動を数値解析により再現した。材料には砂を想定し、粒径を変化させた場合の透水挙動を調べた。得られた結果は、各種の透水係数の推定式で示されている粒径依存性を適切に表現できており、また、実験結果に基づいて報告されている乱流の影響についても再現可能であることが確認された。

キーワード：数値解析，透水，流体解析

## 1. はじめに

近年の著しい計算機能力の向上により、数値解析で再現可能な現象の解像度も大幅に向上している。地盤工学においても、土粒子レベルの運動メカニズムの解明が連続体としての挙動を説明する有力な材料となることが報告されている<sup>1)</sup>。土粒子と間隙水および間隙空気の挙動を直接的に数値解析で再現することにより、液状化、締固め、不飽和土の挙動など、未だメカニズム解明が十分でない問題に対して新たなアプローチが可能となる。

土粒子レベルの地盤材料の挙動の再現には、個別要素法 (DEM)<sup>2)</sup> が広く用いられおり、近年では、DEM の計算に、間隙水の影響を採り入れた研究成果も報告されている。例えば、1次元のパイプネットワークでモデル化する方法<sup>3)</sup>、バックグラウンドセルとダルシー則を用いて簡易的に水圧や間隙水の移動を解く方法<sup>4)</sup>、格子ボルツマン法による間隙流体の挙動解析<sup>3)</sup>などが挙げられる。しかしながら、粒子と流体の相互作用問題は、数値流体力学の分野においても未だ議論の対象であり、実現象を精度よく再現することは難しい。特に、多数の粒子と流体の混合場では、相互作用力の計算が複雑になるため、流体を直接的に解かず、粒子に作用する流体力をモデル化して粒子の運動方程式の外力として表現することも多い。この場合、地盤材料を直接的にモデル化しているとは言えず、再現できる現象

の範囲も狭い。地盤材料のマイクロレベルの挙動を再現するためには、粒子と流体の挙動を直接的に、かつ精度よく表現できる手法が必要となる。

本研究では、流体と固体の混合場の解析に対して非常にフレキシブルな解析手法である Immersed boundary method (IBM)<sup>5)</sup>を用いて、地盤材料の飽和透水シミュレーションを実施し、既存の実験結果や経験則と比較することにより、解析結果の妥当性を確認する。

## 2. 数値解析手法

本研究では、間隙流体の挙動を差分法で表現し、土粒子と間隙水の相互作用を IBM で表現することにより、地盤材料内部の間隙水の挙動を直接表現する。

### 2.1 間隙水挙動の表現

間隙水の挙動は、非圧縮性流体と仮定して以下の Navier-Stokes 方程式を支配方程式として解く。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}$  は速度ベクトル、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度、 $\mu$  は粘性係数である。また、非圧縮性流体の質量保存則から導かれる以下の式を用いている。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

1回の計算ステップの中では以下の手順で式(1)を解く。まず、次式のように、式(1)の圧力項とそれ以外の項に分離する。

$$\frac{\mathbf{u}^t - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{g} \quad (3)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (4)$$

ここで、上付き添え字の  $n$  は前の時間ステップの物理量を表し、 $n+1$  は現在の時間ステップの物理量であることを示している。 $\Delta t$  は 1 回の計算ステップの時間増分である。また、 $\mathbf{u}^t$  は式(1)を分離するための仮の速度ベクトルである。式(3)の各項は、既知情報である前のステップの速度ベクトル  $\mathbf{u}^n$  で構成されているため、仮の速度ベクトル  $\mathbf{u}^t$  を求めることができる。これにより  $\mathbf{u}^t$  が既知となるが、 $\mathbf{u}^{n+1}$  と  $p^{n+1}$  が未知数であるため、式(4)だけでは解くことができない。ここで、式(4)の両辺の発散をとり、変形すると以下の式を得る。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^t - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) \Delta t \quad (5)$$

ここで、式(2)に注目すると、式(2)は速度の発散がゼロになることを示しており、非圧縮条件が満足されるためには、各計算ステップにおいてこの条件が満たされるべきである。式(5)の左辺は、現在のステップの速度の発散を示しているため、ゼロになるはずである。よって、式(5)はさらに変形されて、以下ようになる。

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^t \quad (6)$$

上記の右辺は、圧力のポアソン方程式であり、中心差分法により左辺を離散化すると、圧力を未知数とする連立一次方程式となる。これを解いて、現在の圧力  $p^{n+1}$  を求め、これを式(4)に代入することで、現在の速度ベクトル  $\mathbf{u}^{n+1}$  を求めることができる。以上で示した計算アルゴリズムは、MAC (Marker and Cell) 法<sup>6)</sup>のものであり、非圧縮性流体解析ではこのアルゴリズムが広く用いられている。本研究では、この一連の計算を等間隔直行格子で行い、間隙水の挙動を再現している。

## 2.2 間隙水の流れの中に存在する粒子の表現

本研究では、地盤材料の透水挙動を再現することを目的としているため、先述の間隙水の挙動解析の中で粒子の影響を考慮しなければならない。直行格子を用いた流体解析の中で固体を扱う方法には、分布関数によって固体形状を表現する CIP 法<sup>7)</sup>や Level set 法<sup>8)</sup>、格子を横切る物体の表面位置を直接表現するカットセル法<sup>9)10)</sup>などが挙げられる。前者は、各計算点の分布関数の値から固体の位置を把握することができるため、分布関数を使って支配方程式中で固体と流体との相互作用を表現することが可能であるが、複数個の固体が解析領域に存在するような場合は、分布関数が局所的に変化する部分が多くなるため、高い計算解像度が必要となる。これに対して、後者は、格子の中を横切る物体表面を直接表現することができるが、物体表面

で格子がどのように分割されるかなどの場合分けが煩雑であり、複数個の固体を取り扱う場合は、さらに複雑な計算が必要となる。これに対して、本研究で用いている IBM は、非常に複雑な形状の物体や複数個の移動物体と流体との相互作用に適用した研究成果が報告されており<sup>11)12)</sup>、本研究のように、流体の流れの中で多数の粒子を扱う場合には利点の多い手法である。以下では、IBM の計算アルゴリズムを説明する。

IBM では、式(8)のように支配方程式に付加的な力  $f_a$  を導入し、物体表面の速度を強制する手法である。これにより、直交格子系の中で物体境界が斜めに横切ような場合でも速度の境界条件を満足させることができる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \mathbf{f}_a \quad (7)$$

IBM は、大別して Feedback forcing method と Direct forcing method の 2 種類の手法に分けられるが、本研究では feedback forcing method を用いている。Feedback forcing method では、図-2 に示すように、通常の直行格子による計算点 (Eulerian point) だけでなく、物体表面にも計算点 (Lagrangian point) を配置する。Lagrange point は、物体の移動に伴って位置が変化する。

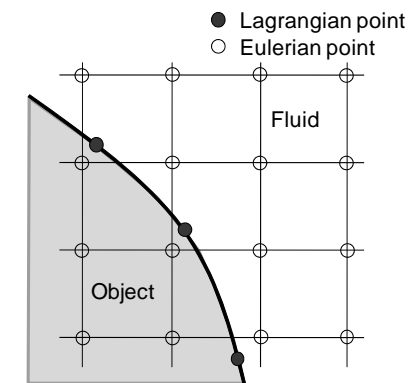
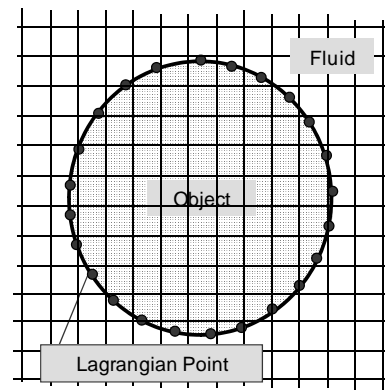


図1 Lagrangian point と Eulerian point

物体表面で滑りなしの条件 (non-slip 条件) の場合 Lagrange point 上における流体速度は、物体の表面速度に一致するように強制されるため、次ステップにおいて流体速度が物体の表面速度に一致すると考えれば、Lagrange point 上で

は以下の関係が成り立つ。

$$\frac{\mathbf{U}_L - \mathbf{u}_L^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{1}{\rho} \nabla p^n + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{g} + \mathbf{F}_a \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{U}_L$  は物体表面 (Lagrangian point 上) の速度ベクトル、 $\mathbf{u}_L^n$  は前のステップの Lagrangian point 上での速度ベクトル、 $\mathbf{F}_a$  は Lagrange point 上での付加的な力を表す。物体の表面速度  $\mathbf{U}_L$  は既知であるため (本研究では粒子は動かないので速度はゼロとなる)、上式から Lagrange point 上での付加的な力  $\mathbf{F}_a$  を求めることができる。ただし、Lagrange point 上の流体の速度  $\mathbf{u}_L^n$  は、周辺の Eulerian point の流体速度  $\mathbf{u}^n$  から補間する必要がある。速度の補間は、デルタ関数を用いて以下のように行う。

$$\mathbf{u}_L^n = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathbf{u}^n \delta(\mathbf{x}_L - \mathbf{x}) h^2 \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{x}_L$  は Lagrange point の位置ベクトルであり、 $\mathbf{x}$  は Eulerian point の位置ベクトルを表す。 $h$  はデルタ関数の影響半径である。ここでのデルタ関数は、本来の数学的な意味とは異なり、有限の広がり (影響半径) をもつ分布関数であり、本研究では以下の式で表現している<sup>13)</sup>。

$$\delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} D\left(\frac{x - x_L}{h}\right) D\left(\frac{y - y_L}{h}\right) \quad (10)$$

$$D(r) = \begin{cases} \left( \frac{3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}}{8} \right) & 0 \leq r < 1 \\ \left( \frac{5 - 2|r| + \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2}}{8} \right) & 1 \leq r < 2 \\ 0 & 2 \leq r \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 $r$  は Lagrange point から Eulerian point までの距離をデルタ関数の影響半径で除した値である。式(9)~(11)を用いて Lagrangian point 上での速度ベクトル  $\mathbf{u}_L^n$  を算出し、式(8)により  $\mathbf{F}_a$  を求める。その後、デルタ関数を用いて、図3に示したように、Lagrange point から Eulerian point に力を分配する。

$$\mathbf{f}_a(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_a(\mathbf{x}_L) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) \Delta V \quad (12)$$

ここで、 $\Delta V$  は Lagrange point での微小体積であり、以下の式で計算される<sup>14)</sup>。

$$\Delta V = \frac{2\pi R}{N} h \quad (13)$$

$R$  は粒子の半径、 $N$  は1つの粒子の表面に配置した Lagrange point の数である。上記の操作により、Eulerian point での付加的な力が得られ、これを式(7)に示したように支配方程式の中で外力として考慮することで、物体表面での流体の速度条件を満足することになる。ただし、式(8)~(12)の一連の操作を1回だけ行っても精度よく速度の境界条件を満足しないことが報告されており<sup>15)</sup>、複数回同じ操作を行う必要があることが確認されている。そのため、本研究でも1ステップの中で繰り返し計算を行うことにより計算精度の向上を図っている。

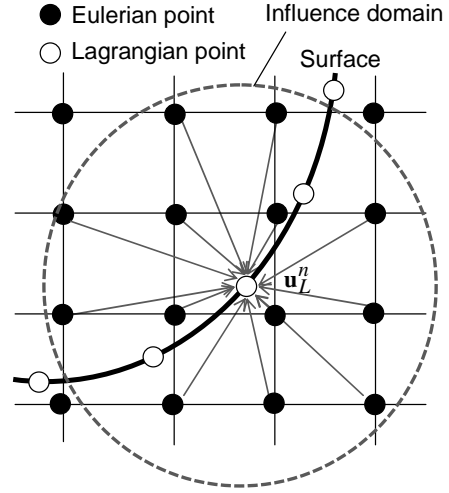


図2 Lagrangian point 上での流体速度の補間

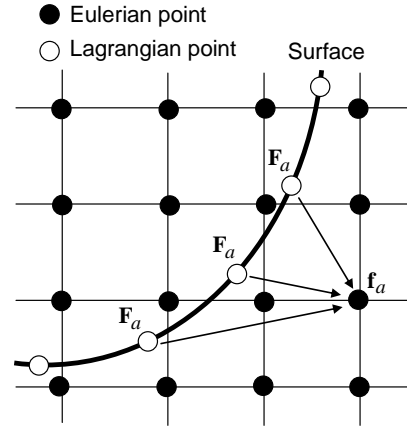


図3 Lagrangian point から Eulerian point への力の分配

### 3. 透水シミュレーション

解析手法の妥当性を検証するために、規則的に配置された粒子の間を流れる3次元透水シミュレーションを行った。図4に解析モデルの概略図と解析条件を示す。立方体の解析領域を想定し、内部に粒子を配置している。立方体の1辺の長さは粒子径の5倍であり、1方向に5個の粒子を配列しているため、解析領域内の粒子の総数は125個である。粒子表面が壁面に接するように配置すると、他の部分に比べて壁面部で空隙が大きくなるため、粒子の中心が壁面上になるように粒子を配置している。解析の中では、図4に示すように、一方向を透水方向とし、透水方向の一端を流入境界、もう一端を流出境界とした。流入・流出境界の圧力を固定し、圧力差によって間隙水を移動させた。図5は解析結果から得られた透水方向に垂直な断面の流速ベクトルを示している。図5より、空隙の小さい断面では流速が速くなっていることがわかる。また、流入面と流出面での流量はほぼ一致しており、非圧縮条件および連続性を精度よく満足していることを確認している。

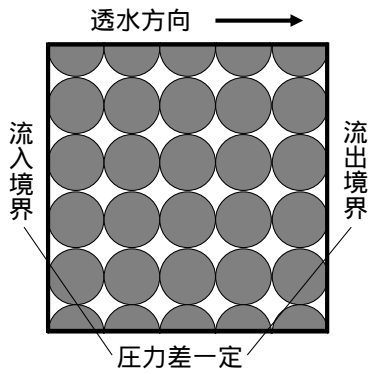
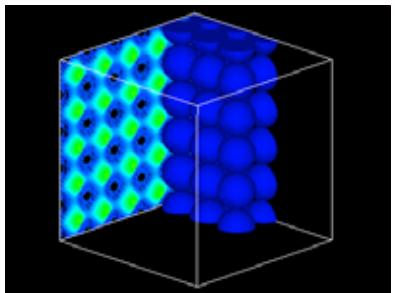
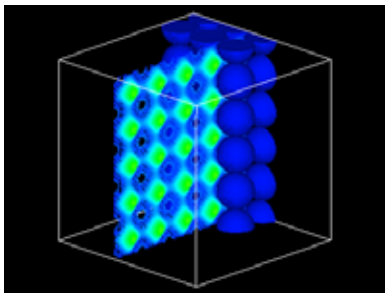


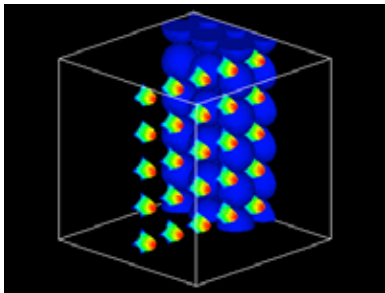
図4 解析モデルの概略図と解析条件



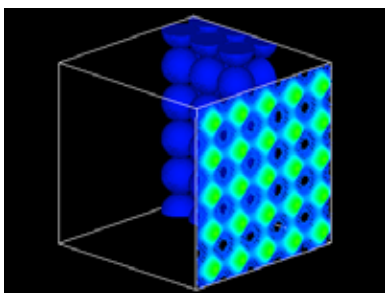
(a) 流入面



(d) 間隙の大きい断面



(c) 間隙の小さい断面



(d) 流出面

図5 内部の流速分布

解析結果の検証として、まず、ダルシー則を満足しているかどうかについて調べた。この検証では、粒径を 0.6mm に固定して、流出面と流入面に設定する圧力の差を変化させることで、異なる導水勾配 (0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0, 2.0 の 7 種類) の条件のもので流出流速を求めた。図 6 は解析結果から得られた導水勾配と平均流速の関係図である。比較のために、図中にダルシー則から算出される導水勾配と流速の関係を実線で示している。解析結果は、導水勾配が 0.5 以下の領域ではダルシー則と一致しているが、それ以上の領域では差が生じている。

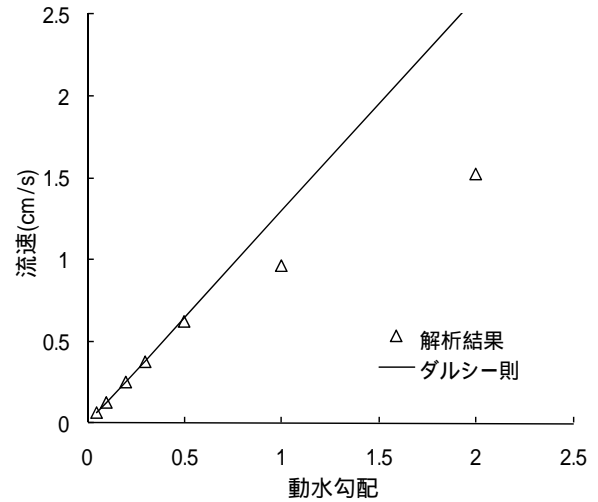


図6 導水勾配と流速の関係図

図6の導水勾配が0.5以上の領域でダルシー則と解析結果に差が生じた原因について考察する。ダルシー則は層流状態で成立するものであり、流速が速い場合は、乱流領域となり、ダルシー則は成立しない。Fancerら<sup>15)</sup>は、以下のレイノルズ数を用いて、実験結果をもとに層流域と乱流域の整理を行っている。

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (14)$$

ここで、 $v$  は流速、 $D$  は粒径、 $\nu$  は間隙流体の動粘性係数、 $Re$  はレイノルズ数である。上式のレイノルズ数を用いた実験結果の整理から、レイノルズ数が1以上の領域では、乱流の影響を受けるために、ダルシー則が成立しないとしている。そこで、図6の解析結果についてレイノルズ数を算出した。図7は図6の各解析結果の隣にレイノルズ数を示したものである。これより、レイノルズ数が小さい領域(層流領域)では、解析結果とダルシー則は精度よく一致しているのに対して、ダルシー則からはずれている結果のレイノルズ数は1以上であり、乱流の影響を受けているために、ダルシー則が成立しないと考えられる。以上より、図6中のダルシー則と解析結果の差は、解析精度が低いために生じている差ではなく、むしろ実際の現象を精度よく再現した結果であると言える。

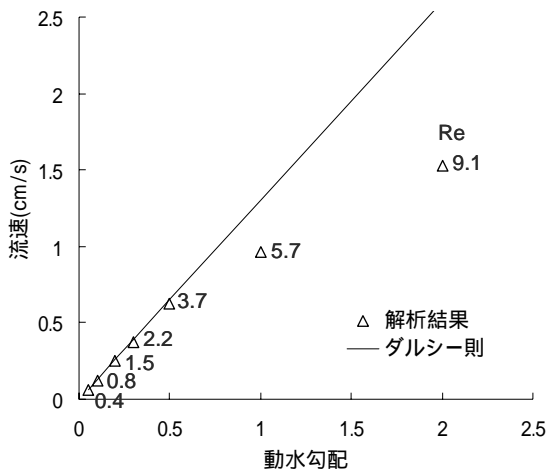


図7 導水勾配と流速の関係図

次に、これまでに提案されている透水係数の推定式と比較することで、解析手法の精度を検証した。透水係数の推定式の代表的なものとして、以下のものが挙げられる。

$$k = CD_{20}^2 \quad (\text{Hazen}) \quad (15)$$

$$k = CD_{10}^2 \frac{\gamma_w e^3}{\eta_w (1+e)} \quad (\text{Taylor}) \quad (16)$$

$$k = CD_w^2 \frac{\gamma_w n^3}{\eta_w (1-n)^2} \quad (\text{Kozeny - Donat}) \quad (17)$$

ここで、 $k$  は透水係数、 $C$  は形状係数、 $D$  は土粒子の粒径、 $r_w$  は間隙水の単位体積重量、 $\eta_w$  は間隙水の粘性係数、 $n$  は間隙率である。これらの式は、共通して透水係数が粒径の2乗に比例するというを示している。そこで、粒子の直径を変化させて、解析を実施し、透水係数がどのように変化するか調べた。粒子の直径は、砂の粒径範囲を想定して、0.08, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 2.0mmの8種類とした。同じ導水勾配でも、粒径が大きくなると流速が早くなるため、全ての解析ケースで間隙水の流れが層流域となるように、導水勾配を調整している。表1は各粒径の計算で設定した導水勾配、解析結果から得られた平均流速と式(14)のレイノルズ数を示している。解析結果から得られたレイノルズ数は全て1.0よりも小さく、層流域であることがわかる。

表1

粒径(mm)	導水勾配	流速(cm/s)	レイノルズ数
0.08	1.0	0.023	0.02
0.1	1.0	0.041	0.04
0.2	1.0	0.13	0.26
0.4	0.1	0.53	0.21
0.6	0.05	1.3	0.38
0.8	0.02	2.3	0.37
1.0	0.01	3.1	0.31
2.0	0.002	12.0	0.47

図8は、解析結果から得られた粒径と透水係数の関係であ

る。図中の点線は、粒径0.08mmの結果を基準にして、粒径の2乗に比例する関係を示している。この結果より、解析結果は、推定式が表現している透水係数の粒径依存性を適切に表現できていることがわかる。

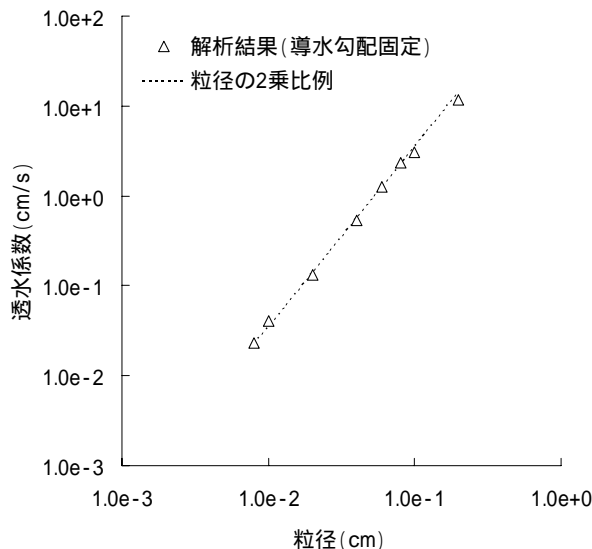


図8 粒径と透水係数の関係図

#### 4. まとめ

本研究では、IBMを用いて、多数の粒子の間を流れる間隙水の挙動を直接的に表現し、ダルシー則およびこれまでに提案されている透水係数の推定式との比較を行った。ダルシー則との比較では、動水勾配を増加させていくと、導水勾配が小さい領域では、解析結果とダルシー則がよい精度で一致したが、動水勾配が大きくなるにつれて、解析結果とダルシー則との間の差が大きくなった。レイノルズ数を算出した結果、解析結果とダルシー則との間の差が生じている解析ケースは、レイノルズ数が1以上であり、ダルシー則が成立しない領域であることが確認された。透水係数の推定式との比較では、透水係数の粒径依存性に着目し、解析の中で粒径を変化させて透水係数の変化を調べた。解析結果は、推定式で表現されている透水係数が粒径の2乗に比例するというを非常によい精度で再現した。以上により、本研究で用いた解析手法は、地盤材料の透水挙動を再現するのに十分な精度を有していることが確認された。

#### 参考文献

- 1) 例えば、Maeda, K. and Hirabayashi, H., Influence of grain properties on macro mechanical behaviors of granular media by DEM, Journal of Applied Mechanics, 9, pp.623-630, 2006.
- 2) Cundall P.A. et al., Geotechnique, 29, 47, 1979.
- 3) Ahrenholz et al., Prediction of capillary hysteresis in a porous material using lattice-Boltzmann methods and comparison to experimental data and a morphological pore network model,

Advances in Water Resources, 31, pp. 1151–1173, 2008.

- 4) 例えば, 高田至郎, 尾崎竜三, 山根健太郎, 個別要素法による液状化側方流動シミュレーション, 建設工学研究所論文報告集, 43-B, pp.35-54, 2001.
- 5) Peskin, C.S, Numerical analysis of blood flow in the heart, J. Comput. Phys., Vol.25, pp.220-252, 1977.
- 6) Harlow, F.H. and Welch, J.E., Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. Phys. Fluids. Vol8, pp.2182-2189, 1965.
- 7) Xiao, F., A computational model for suspended large rigid body in 3D unsteady viscous flow. J. Comput. Phys., 115, 1999.
- 8) Osher, S. and Sethian, J., Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed, Algorithms Based On Hamilton-Jacobi Formulations, J. Comp. Phys. 79, pp.12–49, 1988.
- 9) Yang, G, Causon, DM, Ingram, DM, Saunders, R and Batten, P., A Cartesian cut cell method for compressible flows, Part A: Static body problems, Aeronaut. J., Vol 101, No1002, pp47-56, 1997.
- 10) Quirk, J. J., An Alternative to Unstructured Grids for Computing Gas Dynamic Flows Around Arbitrarily Complex Two-Dimensional Bodies, Computers Fluids, 23, pp.125–142, 1994.
- 11) Jung-II Choi, Roshan C. Oberoi, Jack R. Edwards, Jacky. A. Rosati, An immersed boundary method for complex incompressible flows, Journal of Computational Physics 224, pp. 757–784, 2007.
- 12) Zhi-Gang Feng, Efstathios E. Michaelides, A direct forcing method in the simulations of particulate flows, Journal of Computational Physics 202, pp.20–51, 2005.
- 13) Griffith B. E., Peskin C. S., On the order of accuracy of the immersed boundary method, Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. J. Comput. Phys. 208, pp.75-105, 2005.
- 14) Uhlmann, M., An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. J. Comput. Phys. 209, pp.448-476, 2005.
- 15) Wang Z., Fan J. and Luo K., Combined multi-direct forcing method and immersed boundary method for simulating flows with moving particles, Int. J. multiphase flow, 34, 283-302, 2008.
- 16) Fancher, G.H., Lewis, J.A. and Barnes, J.B. Some physical characteristics of oil sands. Bulletin 12, Mining & Industrial Experiment Station, Pennsylvania State College. Fancher, Lewis and Barnes, 1933.