

## 修正応力による応力誘導異方性の表現

名古屋工業大学	国際会員	菊本 統
名古屋工業大学大学院	学生会員	京川 裕之
名古屋工業大学	国際会員	中井 照夫
名古屋工業大学	国際会員	張 鋒
名古屋工業大学	国際会員	檜尾 正也

### 1. はじめに

土には変形・破壊予測を行う上で考慮しておくべき力学特性が幾つかある。応力誘導異方性や中間主応力の影響はその一つである。前者は、過去の応力履歴に応じて土が異方的な応答を示す性質のことである。後者は、中間主応力の相対的な大きさの違い(三軸圧縮条件や三軸伸張条件、平面ひずみ条件など)によって土の強度や変形特性が異なる性質のことを指す。これらの性質を従来のモデルで考慮するには、通常の応力 $\sigma_{ij}$ 空間で移動硬化則あるいは回転硬化則を考え、さらに中間主応力に応じて強度を表すパラメータを変化させる(もしくは偏差応力面での降伏面の形状を歪ませる)必要があった。しかしながら、移動硬化則や回転硬化則は等方硬化則に比べてかなり複雑であるうえ、背応力や降伏面の中心軸など用いられる変量の物理的意味は明らかではない。また、土の破壊規準(例えばMohr-Coulomb規準)を満足するように、強度を表す材料パラメータを中間主応力のパラメータ(例えば $b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ )に応じて便宜的にフィッティングさせても、任意の3次元応力条件下にある土の強度・変形特性を統一的に評価しているとは言い難い。

これに対して本研究では、土の応力誘導異方性と中間主応力が強度・変形特性に及ぼす影響を、修正応力を用いて簡潔に記述する方法を提案する。提案手法では、通常の応力テンソル $\sigma_{ij}$ の代わりに修正応力テンソルを用いるだけで、シンプルな等方硬化モデルの範疇で応力誘導異方性を考慮することが可能である。また、同手法は中井・三原が中間主応力の影響を考慮するために開発した修正応力 $t_{ij}$ <sup>1)</sup>を拡張したものであるため、中間主応力と応力履歴の影響を統一的に評価することができる。本論文では、提案手法の概要と利点について説明するとともに、実験値と同手法による解析結果の比較を行い、その適用性を検証する。

### 2. 中間主応力が土の強度・変形特性に及ぼす影響を考慮した修正応力 $t_{ij}$ の概要

現在用いられている多くの構成モデルでは、Cam-clay model<sup>2)</sup>と同様に、通常の応力 $\sigma_{ij}$ のパラメータ( $p, q$ )で降伏関数を構成し、 $\sigma_{ij}$ 空間で流れ則を仮定している。しかしながら、このようなモデルでは中間主応力が土の強度・変形特性に及ぼす影響を適切には考慮できない。これに対して、中井・三原<sup>1)</sup>は修正応力 $t_{ij}$ のパラメータ( $t_N, t_S$ )で降伏関数を与え、 $t_{ij}$ 空間で流れ則を仮定する方法を提案している。この方法は、通常モデルで参照する正八面体面(octahedral plane)の代わりに、空間滑動面(SMP)<sup>3), 4)</sup>について応力比 $\sim$ ひずみ増分比関係を考えるSMP\*の概念<sup>5)</sup>を一般化したものであり、任意の3次元応力条件下にある土の応力ひずみ関係を唯一的に記述することができる。修正応力テンソル $t_{ij}$ は、通常の応力テンソル $\sigma_{ij}$ を式(1)のように変換することで与えられる。

$$t_{ij} = a_{ik} \sigma_{kj} \quad (1)$$

式中の2階の変換テンソル $a_{ij}$ は、応力テンソル $\sigma_{ij}$ と共軸で、SMPの方向余弦 $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )を主値とする対称テンソルである。すなわち、修正応力テンソル $t_{ij}$ は応力テンソル $\sigma_{ij}$ および変換テンソル $a_{ij}$ と共軸な対称テンソルであり、その主値 $t_i$ はSMPのトラクションに相当する。 $a_{ij}$ は式(2)のように表される。

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sqrt{\frac{I_3}{I_2}} r_{ij}^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{I_3}{I_2}} (\sigma_{ik} + I_{r2} \delta_{ik}) (I_{r1} \sigma_{kj} + I_{r3} \delta_{kj})^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである。また、 $r_{ij}$ は $\sigma_{ij}$ の平方根( $r_{ik} r_{kj} = \sigma_{ij}$ )であり、 $I_2, I_3$ および $I_{r1}, I_{r2}, I_{r3}$ は式(3)および(4)で表される $\sigma_{ij}$ と $r_{ij}$ の不変量である。なお、SMPは応力比により決定される面であり、 $a_{ij}$ は応力の相対的な大きさで定まる無次元のテンソルである。

表-1 通常の弾塑性モデルと修正応力 $t_{ij}$ で用いられる  
応力およびひずみ増分パラメータの比較

ordinary concept	$t_{ij}$ concept
$\delta_{ij}$ (Oct. plane)	$a_{ij}$ (SMP)
$\sigma_{ij}$	$t_{ij} = a_{ik}\sigma_{kj}$
$p = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$	$t_N = t_{ij}a_{ij}$
$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$	$t'_{ij} = t_{ij} - t_N a_{ij}$
$q = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$	$t_S = \sqrt{t'_{ij}t'_{ij}}$
$\eta_{ij} = s_{ij}/p$	$x_{ij} = t'_{ij}/t_N$
$\eta = q/p = \sqrt{\eta_{ij}\eta_{ij}}$	$X = t_S/t_N = \sqrt{x_{ij}x_{ij}}$
$d\varepsilon_v = d\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$	$d\varepsilon_N = d\varepsilon_{ij}a_{ij}$
$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_v\delta_{ij}/3$	$d\varepsilon'_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_N a_{ij}$
$d\varepsilon_d = \sqrt{(2/3)d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij}}$	$d\varepsilon_S = \sqrt{d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij}}$
$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$	$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t_{ij}}$

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = e_{ijk}\sigma_{i1}\sigma_{j2}\sigma_{k3} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

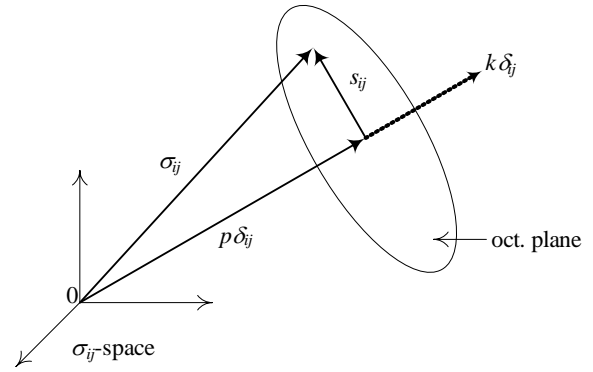
$$\left. \begin{aligned} I_{r1} &= \sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3} = r_{ii} \\ I_{r2} &= \sqrt{\sigma_1\sigma_2} + \sqrt{\sigma_2\sigma_3} + \sqrt{\sigma_3\sigma_1} = \frac{1}{2}(r_{ii}^2 - r_{ij}r_{ji}) \\ I_{r3} &= \sqrt{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = e_{ijk}r_{i1}r_{j2}r_{k3} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $e_{ijk}$ はエディントンのイプシロンである。

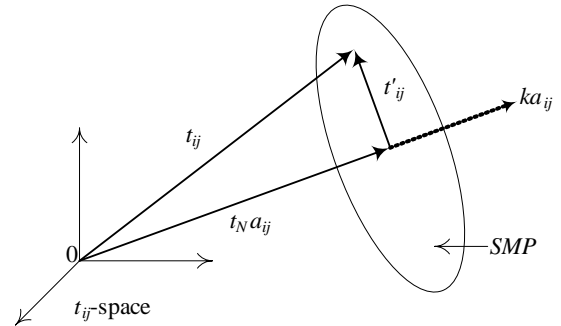
表-1に、Cam clay modelなど通常の弾塑性構成モデルと修正応力 $t_{ij}$ の概念で用いられる応力およびひずみ増分パラメータの比較を示す。表-1から判るように、両者の違いは正八面体面に着目するかSMPに着目するかであり、参照する面さえ規定すれば $t_{ij}$ およびそれに基づくパラメータは相似的に与えられる。また、応力パラメータを図-1に示す。図より、通常の応力パラメータ( $p, q$ )は応力 $\sigma_{ij}$ 空間の正八面体面に垂直な成分および平行な成分に対応するが、 $t_{ij}$ の応力パラメータ( $t_N, t_S$ )は修正応力 $t_{ij}$ 空間のSMPに垂直な成分および平行な成分となる。

### 3. 応力誘導異方性と修正応力 $t_{ij}$ の関係

図-2は土の応力誘導異方性と連続体の範疇での記述方法について模式的に説明している。Oda<sup>6)</sup>の要素試験における微視的観察によると、土が異方的な応力履歴を受けると、(a)に示すように土粒子同士の接触面の法線方向は徐々に最大主応力 $\sigma_1$ 方向に偏り、異方的な挙動を呈することが指摘されている。このとき、応力履歴による土構造の変化(すなわち応力誘導異方性)は、粒子の接触法線の平均的分布を示す2階の

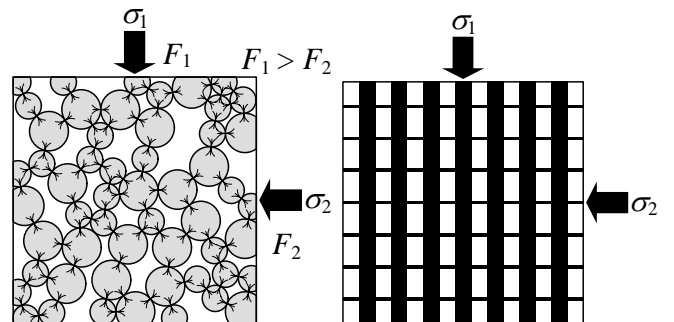


(a)通常の応力 $\sigma_{ij}$ のパラメータ

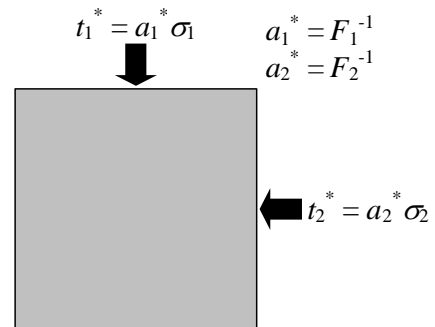


(b)修正応力 $t_{ij}$ のパラメータ

図-1 応力パラメータの定義



(a)応力履歴による粒子の接触状況の変化 (b)材料特性の異方性を考慮した従来の構成モデル



(c)修正応力による異方性のモデル化

図-2 応力誘導異方性と修正応力による表現

構造テンソル $F_{ij}$ により表すことができる。このような誘導異方性は、これまで(b)のように $\sigma_1$ 方向の剛性を

相対的に大きく見積もることによってモデル化されることが多かった。これに対して佐武<sup>7), 8)</sup>および著者の一人は、移動硬化則を用いなくとも、応力履歴の影響を考慮した構造テンソルにより変換された修正応力テンソルを用いれば、応力誘導異方性の表現は可能であると指摘している。すなわち、(c)に示すように異方性の発達・消散に応じて通常の応力 $\sigma_{ij}$ を修正して用いることにより、材料特性の等方性を仮定したまま土の応力誘導異方性を記述することが可能である。いま、構造テンソル $F_{ij}$ の逆テンソルに相当するものを $a_{ij}^* (= F_{ij}^{-1})$ とすると、次式で定義される修正応力テンソル $t_{ij}^*$ は粒状体の誘導異方性を適切に記述しうる。

$$t_{ij}^* = \frac{a_{ik}^* \sigma_{kj} + \sigma_{ik} a_{kj}^*}{2} \quad (5)$$

しかしながら、種々の応力経路下で構造テンソル(もしくは修正応力テンソル)の変化を定量的に評価するのは難しく、このような考えに基づいて定式化され、初期値・境界値問題に適用可能な構成モデルはこれまで開発されていなかった。

これに対して、筆者らは前章で説明した修正応力 $t_{ij}$ と応力誘導異方性の関係に着目する。佐武は光弾性実験の結果より、せん断履歴のない単調な応力経路下では、構造テンソル $F_{ij}$ と応力テンソル $\sigma_{ij}$ の主値が概ね以下の関係式を満足することを示している。

$$\frac{F_i}{F_j} \equiv \left( \frac{a_i^*}{a_j^*} \right)^{-1} = \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \right)^{0.5} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6)$$

式(6)は、Maeda and Hirabayashi<sup>9)</sup>による2次元個別要素解析でも粒子特性や密度、応力レベルによらず成立することが示されている。一方、式(2)より修正応力 $t_{ij}$ への変換テンソル $a_{ij}$ の主値について次式が導かれる。

$$\frac{a_i}{a_j} = \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \right)^{-0.5} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (7)$$

いま、 $a_{ij}$ と $a_{ij}^*$ の共軸性を仮定すると、式(6)、(7)より単調載荷時には $a_{ij}$ と $a_{ij}^*$ が一致することは明らかである。すなわち、単調な応力経路下では中間主応力の影響( $a_{ij}$ )と異方性( $a_{ij}^*$ )は本質的には同じであり、修正応力テンソル $t_{ij}$ は単調な載荷経路下における誘導異方性を反映させた力学変数だといえる。したがって、修正応力 $t_{ij}$ (あるいは変換テンソル $a_{ij}$ )をより一般的な応力条件下で応力履歴の影響を考慮した修正応力 $t_{ij}^*$ (あるいは変換テンソル $a_{ij}^*$ )に拡張できれば、表-1に示したような応力とひずみ増分のパラメータを利用して、応力誘導異方性を簡単に記述することが可能になると考える。

## 4. 応力誘導異方性を考慮した修正応力 $t_{ij}^*$

本章では、中間主応力を考慮した修正応力 $t_{ij}$ を、一般的な応力条件下で応力履歴の影響も考慮できる修正応力 $t_{ij}^*$ に拡張する。なお、応力誘導異方性の発達・消散は、修正応力 $t_{ij}^*$ (あるいは変換テンソル $a_{ij}^*$ )の発達則により表現されるが、本研究ではこれを過去の実験事実を参考にしながら規定する。つづいて、提案手法の適用の一例として、修正応力 $t_{ij}^*$ を等方硬化型Subloading  $t_{ij}$ モデル<sup>10)</sup>に適用し、提案手法の特徴について説明する。

### 4.1. 応力誘導異方性に関する実験事実と修正応力 $t_{ij}^*$ の発達則

修正応力 $t_{ij}$ を中間主応力と応力履歴の影響を統一的に考慮できる物理量 $t_{ij}^*$ に拡張するにあたっては、以下に列挙するような過去の実験事実を満足するように変換テンソル $a_{ij}^*$ の発達則を規定する必要がある。

- 土の構造(粒子の接触状況)は除荷時(弾性変形時)にはほとんど変化しない。
- せん断履歴のない単調載荷時には、応力履歴の影響がほとんど現れない(応力履歴とは無関係に応力ひずみ関係が規定される)。
- 土の強度は応力履歴とは無関係に決まる。
- 応力履歴による影響が生じて、塑性変形の進展によって徐々に解消されて、やがて単調載荷時と同様の挙動を呈するようになる。

まず、実験事実(a)より、 $a_{ij}^*$ は構造テンソル $F_{ij}$ の逆テンソルに相当することから、その発達則に以下の条件が与えられる。

$$da_{ij}^* = 0 \text{ when } d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (8)$$

次に、(b)より単調載荷時は応力履歴の影響を受けないことから、 $a_{ij}^*$ に式(9)の発達則が与えられる。

$$da_{ij}^* = da_{ij} \text{ when } d\varepsilon_{ij}^p \neq 0 \cap a_{ij}^* = a_{ij} \quad (9)$$

最後に、(c)と(d)は例え過去の応力履歴による影響が生じて $a_{ij}^*$ と $a_{ij}$ が一致しない場合でも、塑性変形が生じるとその影響が解消され、 $a_{ij}^*$ は $a_{ij}$ に近づくように変化し、破壊応力比近くでは完全に一致することを示している。この2つの実験事実により、 $a_{ij}^*$ の発達則は以下のように与えられる。

$$da_{ij}^* = da_{ij} + k(a_{ij}^* - a_{ij}) \text{ when } d\varepsilon_{ij}^p \neq 0 \cap a_{ij}^* \neq a_{ij} \quad (10)$$

$k$ は応力履歴の影響度の解消速さを表す係数であり、塑性ひずみ増分のノルムに比例する。

表-2 通常の弾塑性モデル，修正応力 $t_{ij}$ および修正応力 $t_{ij}^*$  で用いられる応力およびひずみ増分パラメータの比較

	ordinary concept	$t_{ij}$ concept	$t_{ij}^*$ concept
transform tensor to modified stress	-	$a_{ij}$	$a_{ij}^*$
stress tensor	$\sigma_{ij}$	$t_{ij} = a_{ik}\sigma_{kj}$	$t_{ij}^* = (a_{ik}^*\sigma_{kj} + \sigma_{ik}a_{kj}^*)/2$
unit tensor normal to reference plane	$\delta_{ij}$ (Oct. plane)	$a_{ij}$ (SMP)	$a_{ij}^{\#}$
mean stress	$p = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$	$t_N = t_{ij}a_{ij}$	$t_N^* = t_{ij}^*a_{ij}^{\#}$
deviatoric stress tensor	$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$	$t'_{ij} = t_{ij} - t_N a_{ij}$	$t'_{ij}^* = t_{ij}^* - t_N^* a_{ij}^{\#}$
deviatoric stress	$q = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$	$t_S = \sqrt{t'_{ij}t'_{ij}}$	$t_S^* = \sqrt{t'_{ij}^*t'_{ij}^*}$
stress ratio tensor	$\eta_{ij} = s_{ij}/p$	$x_{ij} = t'_{ij}/t_N$	$x_{ij}^* = t'_{ij}^*/t_N^*$
stress ratio	$\eta = q/p = \sqrt{\eta_{ij}\eta_{ij}}$	$X = t_S/t_N = \sqrt{x_{ij}x_{ij}}$	$X^* = t_S^*/t_N^* = \sqrt{x_{ij}^*x_{ij}^*}$
strain increment normal to reference plane	$d\varepsilon_v = d\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$	$d\varepsilon_N = d\varepsilon_{ij}a_{ij}$	$d\varepsilon_N^* = d\varepsilon_{ij}a_{ij}^{\#}$
deviatoric strain increment tensor	$de_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_v\delta_{ij}/3$	$d\varepsilon'_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_N a_{ij}$	$d\varepsilon'_{ij}^* = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_N^* a_{ij}^{\#}$
strain increment parallel to reference plane	$d\varepsilon_d = \sqrt{(2/3)de_{ij}de_{ij}}$	$d\varepsilon_S = \sqrt{d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij}}$	$d\varepsilon_S^* = \sqrt{d\varepsilon'_{ij}^*d\varepsilon'_{ij}^*}$
flow rule	$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$	$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t_{ij}}$	$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t_{ij}^*}$

$$k = \omega \left\| d\varepsilon_{ij}^p \right\| \quad (11)$$

ここに， $\omega$ は塑性変形に伴う応力履歴の影響の消散速さを表す材料パラメータである．なお，式(9)および(10)の $da_{ij}$ は，式(2)より式(12)，(13)で与えられる．

$$da_{ij} \equiv \frac{\partial a_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (12)$$

$$\equiv \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial r_{mn}} \frac{\partial r_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} \right) d\sigma_{kl}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_{ij}}{\partial I_2} &\equiv -\frac{a_{ij}}{2I_2}, & \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ij}} &\equiv \sigma_{kk}\delta_{ij} - \sigma_{ji} \\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial I_3} &\equiv \frac{a_{ij}}{2I_3}, & \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} &\equiv \frac{1}{2}e_{ikl}e_{jst}\sigma_{ks}\sigma_{lt} \\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial r_{kl}} &\equiv \sqrt{\frac{I_3}{I_2}}\delta_{ik}\delta_{jl}, & \frac{\partial r_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &\equiv (\delta_{ik}r_{jl} + \delta_{jl}r_{ik})^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

以上のように，変換テンソル $a_{ij}^*$ の発展則が規定された．最後に，式(5)を用いて応力テンソル $\sigma_{ij}$ を変換すれば修正応力テンソル $t_{ij}^*$ が得られる．

## 4.2. 修正応力 $t_{ij}^*$ の応力およびひずみ増分パラメータ

修正応力 $t_{ij}$ の概念では， $a_{ij}$ は $\sigma_{ij}$ を $t_{ij}$ に変換するだけでなく，修正応力 $t_{ij}$ とひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^p$ を修正応力空間におけるパラメータに分解する際にも用いられていた．しかし，本提案手法では $a_{ij}^*$ と $t_{ij}^*$ が非共軸であるため，等方硬化則に則って構成モデルを展開するためには， $t_{ij}^*$ と共軸な単位テンソル $a_{ij}^{\#}$ を新たに導入し，

応力およびひずみ増分の分解に用いる必要がある．このようなテンソルは，従来の修正応力 $t_{ij}$ の概念における $t_{ij}$ と $a_{ij}$ の関係から，式(14)で与えられる．

$$a_{ij}^{\#} = \frac{I_{t3}^*}{\sqrt{I_{t2}^{*2} - 2I_{t1}^*I_{t3}^*}} t_{ij}^{*-1} \quad (14)$$

ここに， $I_{t1}^*, I_{t2}^*, I_{t3}^*$ は $t_{ij}^*$ の第1～3不変量である

$$\left. \begin{aligned} I_{t1}^* &= t_1^* + t_2^* + t_3^* = t_{ii}^* \\ I_{t2}^* &= t_1^*t_2^* + t_2^*t_3^* + t_3^*t_1^* = \frac{1}{2}(t_{ii}^{*2} - t_{ij}^*t_{ji}^*) \\ I_{t3}^* &= t_1^*t_2^*t_3^* = e_{ijk}t_{i1}^*t_{j2}^*t_{k3}^* \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(14)で求めた $a_{ij}^{\#}$ により，修正応力 $t_{ij}$ の概念と同様， $t_{ij}^*$ および $d\varepsilon_{ij}^p$ を修正応力 $t_{ij}^*$ 空間で分解することができる．最後に一般的な弾塑性モデル，修正応力 $t_{ij}$ および修正応力 $t_{ij}^*$ の概念における応力およびひずみ増分パラメータの比較を表-2に示す．

## 4.3. 修正応力 $t_{ij}^*$ の等方硬化型弾塑性モデルへの適用

新しい応力テンソル $t_{ij}^*$ を等方硬化型 Subloading  $t_{ij}$ モデル<sup>10)</sup>に適用し，中間主応力と応力履歴の影響を統一的に説明できるモデルへと拡張する．なお，Subloading  $t_{ij}$ モデルの概要については他の文献<sup>9)</sup>に譲り，ここでは主に $t_{ij}^*$ の適用方法について説明する．

まず一般的な土の弾塑性モデルと同様に，提案モデルの降伏関数は平均応力の対数と応力比の増加関数の和として定義される．Subloading  $t_{ij}$ モデルの降伏関数を $t_{ij}^*$ のパラメータに置き換えると，

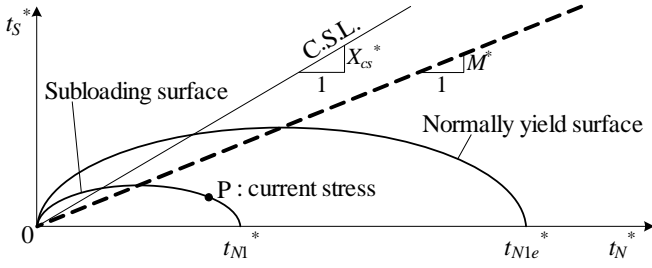


図-3 降伏面の形状

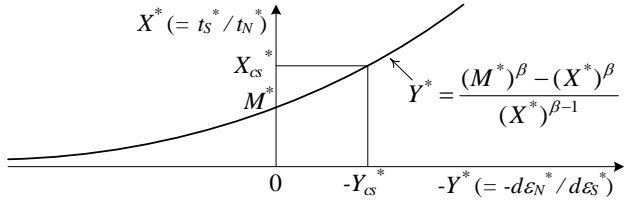


図-4 応力比～ダイレイタンスー関係

$$f = \ln t_N^* + \frac{1}{\beta} \left( \frac{X^*}{M^*} \right)^\beta - \ln t_{N1}^* = 0 \quad (16)$$

が得られる。ここに、 $\beta$ は降伏面の形状を決める材料パラメータであり、 $\beta = 1$ のとき $f$ はCam clayモデルと同じ関数となる。 $t_{N1}^*$ は $X^* = 0$ かつ $f = 0$ での $t_N^*$ の値であり、降伏面の大きさを表す。図-3に $t_N^*$ - $t_s^*$ 平面における降伏面の形状を示す。式(16)の $M^*$ の値は、限界状態における応力比 $X_{CS}^* (= (t_s^*/t_N^*)_{CS})$ および塑性ひずみ増分比 $Y_{CS}^* (= (d\varepsilon_N^*/d\varepsilon_s^*)_{CS})$ を用いて次のように与えられる。

$$M^* = \left( X_{CS}^{*\beta} + X_{CS}^{*\beta-1} Y_{CS}^* \right)^{1/\beta} \quad (16)$$

$X_{CS}^*$ と $Y_{CS}^*$ は、三軸圧縮条件での限界状態の主応力比 $R_{CS} = (\sigma_1/\sigma_3)_{CS(\text{comp.})}$ により以下のように表される。

$$X_{CS}^* = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( \sqrt{R_{CS}} - \frac{1}{\sqrt{R_{CS}}} \right) \quad (17)$$

$$Y_{CS}^* = \frac{1 - \sqrt{R_{CS}}}{\sqrt{2}(\sqrt{R_{CS}} + 0.5)} \quad (18)$$

ここで $t_{ij}^*$ と $d\varepsilon_{ij}^p$ の共軸性を仮定し、式(19)および図-4に示すような応力比～ダイレイタンスー関係を得る。

$$Y^* = \frac{M^{*\beta} - X^{*\beta}}{X^{*\beta-1}} \quad (19)$$

修正応力 $t_{ij}^*$ 空間で関連流れ則を仮定する。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f(t_{ij}^*, a_{ij}^{\#})}{\partial t_{ij}^*} \quad (20)$$

ここに、 $\Lambda$ は塑性ひずみ増分の大きさを表す係数である。 $t_{N1}^*$ は硬化パラメータであり、塑性体積ひずみと以下のように関係付ける。

$$\varepsilon_v^p = C_p \ln \frac{t_{N1}^*}{t_{N0}^*} \quad (C_p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0}) \quad (21)$$

式(21)は正規圧密土の塑性体積ひずみが現応力によって決まり、過去の応力履歴に無関係であるという仮定に基づいている。ここに、 $e_0$ は $X^* = 0$ かつ $t_N^* = p = t_{N0}^*$ での間隙比である。式(16)より、次の適合条件式が得られる。

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial a_{ij}^*} da_{ij}^* - \frac{1}{C_p} d\varepsilon_v^p = 0 \quad (22)$$

式(22)では、従来の $t_{ij}$ モデルと異なり、変換テンソル $a_{ij}^*$ が応力テンソル $\sigma_{ij}$ とは独立であることに注意が必要である。式(10)、(11)を代入し、変形すると塑性係数 $\Lambda$ が得られる。

$$\Lambda = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial a_{kl}^*} \frac{\partial a_{kl}^*}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij}}{\frac{1}{C_p} \frac{\partial f}{\partial t_{ii}^*} - \omega \frac{\partial f}{\partial a_{ij}^*} (a_{ij}^* - a_{ij}) \left\| \frac{\partial f}{\partial t_{kl}^*} \right\|}} = \frac{n_{ij}^* d\sigma_{ij}}{h_p} \quad (23)$$

分母の $h^p$ は塑性成分の剛性を表す塑性係数である。

一方、弾性ひずみ増分は一般的なフックの法則に従うこととする。

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} \quad (24)$$

$D_{ijkl}^e$ は弾性剛性テンソルであり、次式で表される。

$$D_{ijkl}^e = \frac{E_e}{1 + \nu_e} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu_e E_e}{(1 + \nu_e)(1 - 2\nu_e)} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (25)$$

ここに弾性係数率 $E_e$ は、膨潤指数 $\kappa$ とポアソン比 $\nu_e$ により次式で与えられる。

$$E_e = \frac{3(1 - 2\nu_e)(1 + e_0)p}{\kappa} \quad (26)$$

最後に、応力ひずみ関係は式(25)のように導かれる。

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (27)$$

ここに、弾塑性剛性テンソル $D^{ep}$ は次式で表される。

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - \frac{D_{ijmn}^e \frac{\partial f}{\partial t_{mn}^*} n_{op}^* D_{opkl}^e}{h_p + n_{qr}^* D_{qrst}^e \frac{\partial f}{\partial t_{st}^*}} \quad (28)$$

		Influence of stress histories	
		not considered	considered
Influence of intermediate principal stress	not considered	Ordinary isotropic model as Cam Clay model	Kinematic / rotational hardening model
	considered	Modified stress $t_{ij}$ (Subloading $t_{ij}$ model)	Modified stress $t_{ij}^*$ (proposed model)

○ coaxial, ☆: non-coaxial

図-5 提案手法と従来のモデルの比較

表-3 通常の弾塑性モデルと修正応力 $t_{ij}$ で用いられる応力およびひずみ増分パラメータの比較

$\lambda$	0.0320	
$\kappa$	0.0020	
$e_{NC}$ at $p = 98$ kPa & $q = 0$ kPa	1.05	Same parameters as Cam clay model
$R_{CS} = (\sigma_1/\sigma_3)_{CS(comp.)}$	2.6	
$v_e$	0.2	
$\beta$	1.6	Shape of yield surface (same as original Cam clay at $\beta = 1$ )
$a$	$a_{AF}$ 15 $a_{IC}$ 85	Influence of density and confining pressure
$\omega$	40.0	Influence of stress history

### 4.3. 提案手法の特徴と利点

提案手法と他の手法の特徴の比較を図-5に示す。提案手法では、等方硬化則の範疇で中間主応力と応力履歴の影響を簡潔かつ統一的に記述することができる。また、提案手法は等方硬化則を修正応力 $t_{ij}^*$ 空間で仮定しているため、応力テンソル $\sigma_{ij}$ と塑性ひずみ増分テンソル $d\epsilon_{ij}^p$ の非共軸性を表現することも可能である。加えて、提案手法は以下に示すようなSubloading  $t_{ij}$ モデルの利点をそのまま残している。

- 塑性ひずみ増分を、修正応力空間で関連流動則に従う成分 $d\epsilon_{ij}^{p(AF)}$ と等方的な圧縮成分 $d\epsilon_{ij}^{p(IC)}$ に分ける<sup>11)</sup>ことで、塑性ひずみ増分の応力経路依存性を考慮することができる。
- 下負荷面の概念<sup>12)</sup>を導入することで、密度や拘束圧の影響を考慮することができる。

最後に、構成パラメータとLeighton Buzzard砂での値を表-3に示す。提案手法で新たに追加されたパラメータは、塑性変形に伴う応力履歴の影響の消散速さを表すパラメータ $\omega$ のみである。

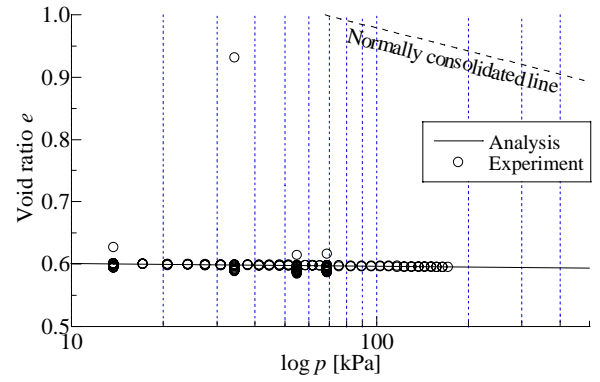


図-6 等方圧縮試験

### 5. 提案手法による解析値と実験値の比較

修正応力 $t_{ij}^*$ により応力履歴の影響を考慮できるように拡張した等方硬化型のSubloading  $t_{ij}$ モデル(以下、提案モデルと呼ぶ)を用いて、中密なLeighton Buzzard砂( $e_{max} = 0.815$ ,  $e_{min} = 0.516$ ,  $G_s = 2.66$ ,  $D_r = 72\%$ )の三主応力試験<sup>13)</sup>の解析を行い、実験値およびSubloading  $t_{ij}$ モデルによる解析値と比較することでその適用性を検証する。同試験は、4種類の応力レベル( $p = 13.8, 34.5, 55.2, 69.0$  kPa)に対して平均応力一定条件で様々な応力経路を与え、計97パターン実施されている。本論文では、幾つかの応力経路について結果の比較を示す。

解析には表-3に示すLeighton Buzzard砂の構成パラメータを用いた。これらの値は、等方圧縮試験およびLode角一定条件での三主応力試験の結果をもとに設定した。図-6に等方圧縮試験、図-7に三主応力試験の結果と解析値の比較を示す。図-6, 7より、解析値は実験値を概ね捉えている。また、ここで示すような単調な載荷経路下では、修正応力 $t_{ij}$ と $t_{ij}^*$ が常に一致するため、提案モデルとSubloading  $t_{ij}$ モデルによる解は同一であることがわかる。なお、図-7の各図には主応力方向を入れ替えて実施した複数の実験値がそれぞれプロットしてあるが、供試体は初期異方性をほとんど有していないことが確認できる。

図-8~11に平均応力 $p = 34.5$  kPaでの三主応力試験の結果と対応する解析値を示す。図-8, 10は主ひずみ $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ と応力比 $q/p$ および体積ひずみ $\epsilon_v$ の関係であり、プロットは実験値、破線はSubloading  $t_{ij}$ モデルによる解析値、実線は提案モデルによる解析値を表している。図-9, 11は正八面体面での応力経路とせん断ひずみ増分であり、矢印の方向はせん断ひずみ増分の方向、長さは応力比の増分に対するせん断ひずみ増分の比を表す。

図-8, 9は、等方応力状態のA( $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (34.5, 34.5, 34.5)$  kPa)から偏差応力面上を半径方向にB( $(51.1, 17.9, 34.5)$  kPa)までせん断した後、C( $(55.2, 15.9, 32.4)$  kPa)へ

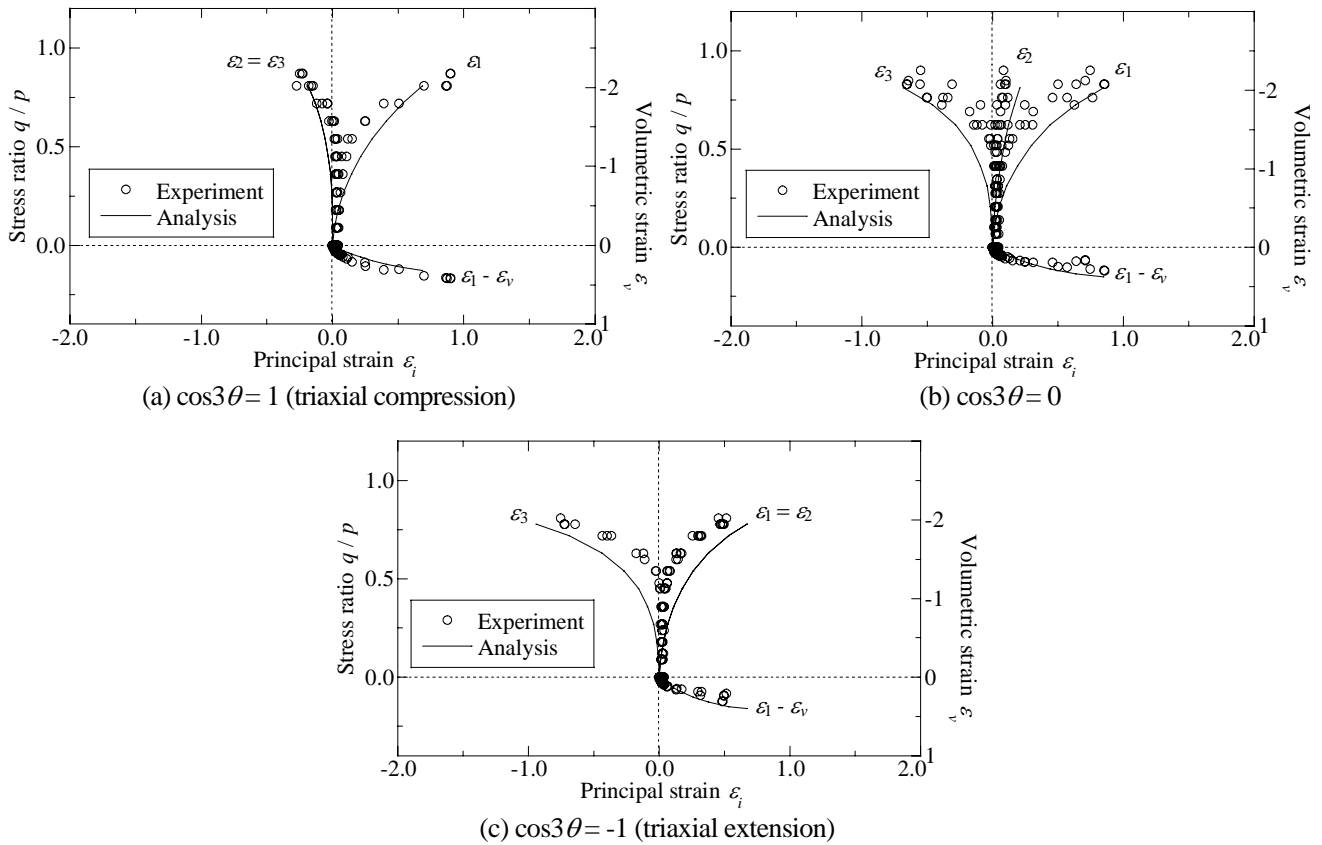


図-7 Lode角 $\theta$ 一定三主応力試験 ( $p = 34.5$  kPa)

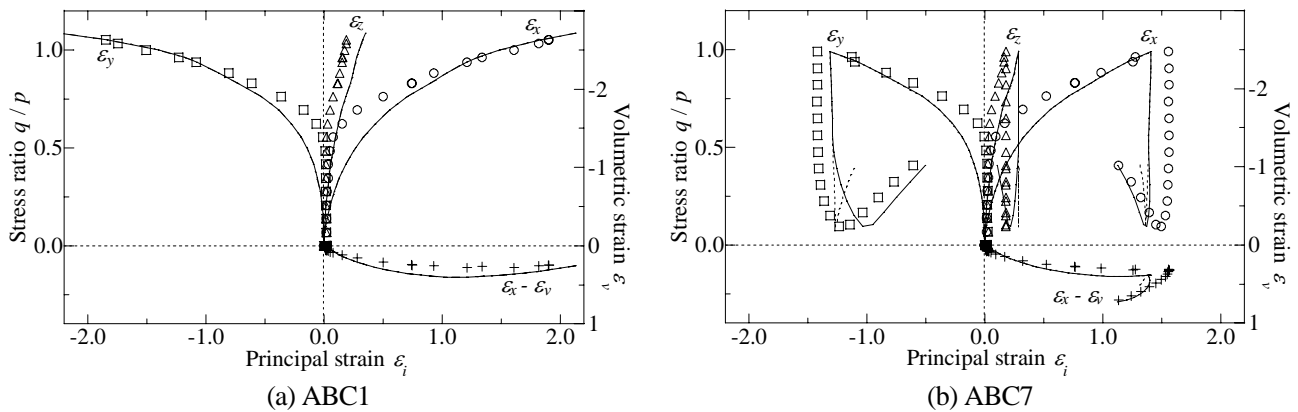


図-8 三主応力試験(経路ABC)の応力ひずみ関係

応力経路を与え、さらに1時および7時方向に応力変化を与えた試験の結果である。図-8より、Subloading  $t_{ij}$  モデルおよび提案モデルはせん断初期の剛性を実測値よりやや小さめに見積もるものの、砂の典型的な強度特性やダイレイタンス特性を概ね表現できることがわかる。両図の(a)に示した応力経路 ABC1 では、常に弾塑性挙動を呈する荷重方向へと応力変化が与えられるため、提案モデルと Subloading  $t_{ij}$  モデルでは同じ解が得られる。一方、(b)に示した応力経路 ABC7 では、C から7の応力経路で弾性変形のみが生じる除荷が起こるため、C 以降は両者による解析値が異なっている。このとき、下荷重面を導入している Subloading  $t_{ij}$  モデルでも逆振り荷重に伴う塑性変形を

考慮することは可能であるが、応力履歴の影響を考慮した提案モデルのほうが実測値に見られる剛性低下をよりの確に捉えていることがわかる。なお、図-9に示す応力経路下では、両モデルから算出されるせん断ひずみ増分の方向に明確な差異はなく、ともに実測値を適切に表現している。

図-10, 11 は、等方応力状態 A ( $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (34.5, 34.5, 34.5)$  kPa) から半径方向に C ( $(55.2, 15.9, 32.4)$  kPa) まで単調にせん断した後、I ( $(41.4, 27.6, 34.5)$  kPa) まで除荷し、1時、4時、7時および10時の各方向に応力経路を与えた試験の結果を示している。図より、A から C の単調なせん断過程では、Subloading  $t_{ij}$  モデルおよび提案モデルによる解析値は一致し、ともに応力比の

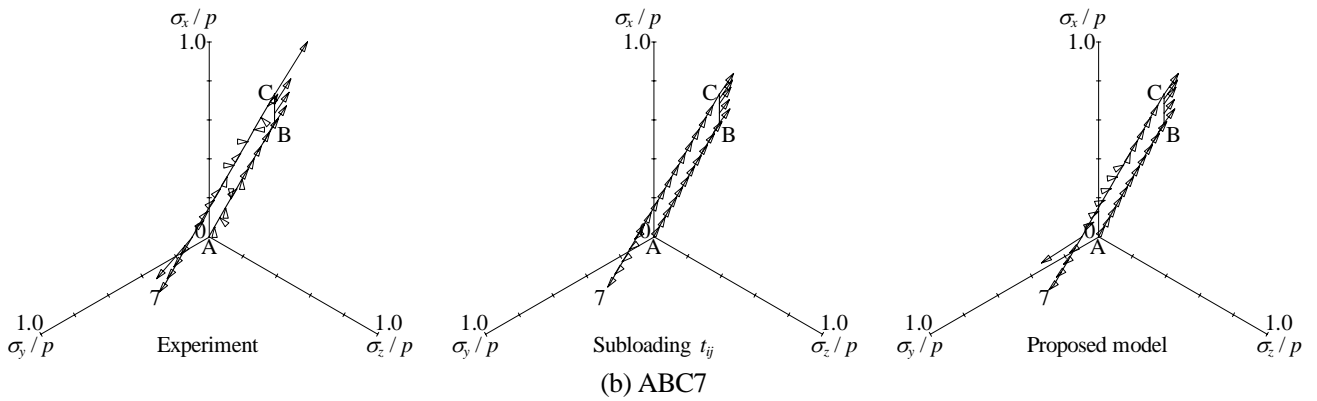
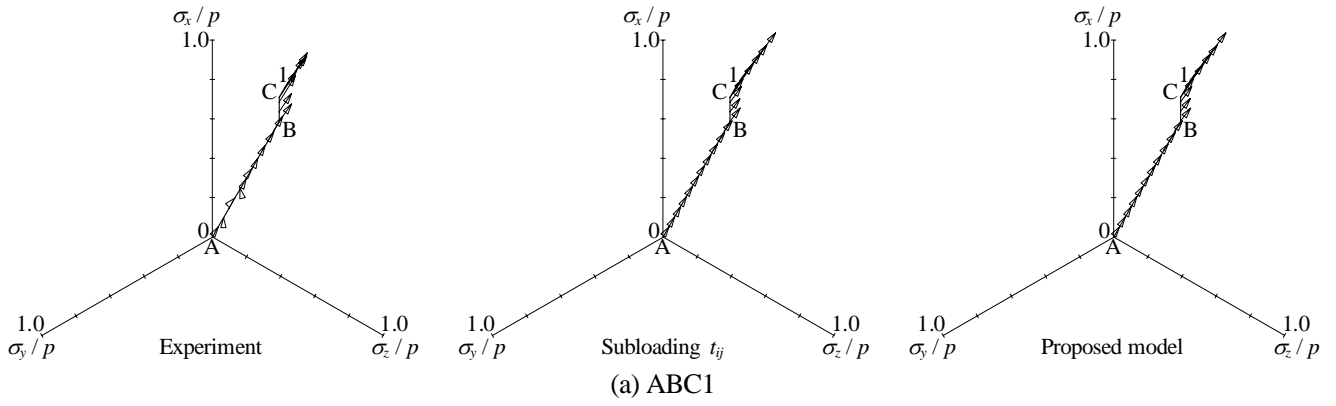


図-9 三主応力試験(経路ABC)の応力経路およびひずみ増分方向

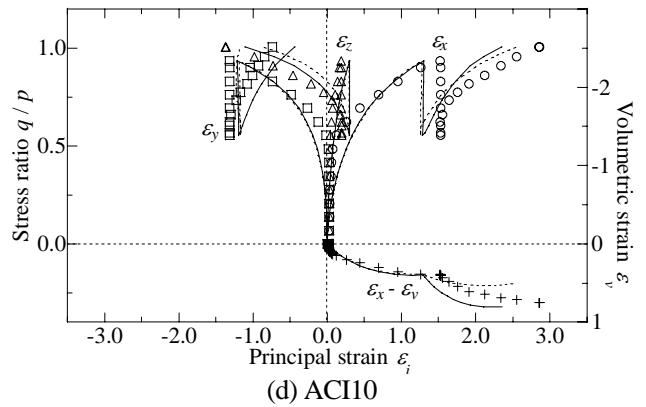
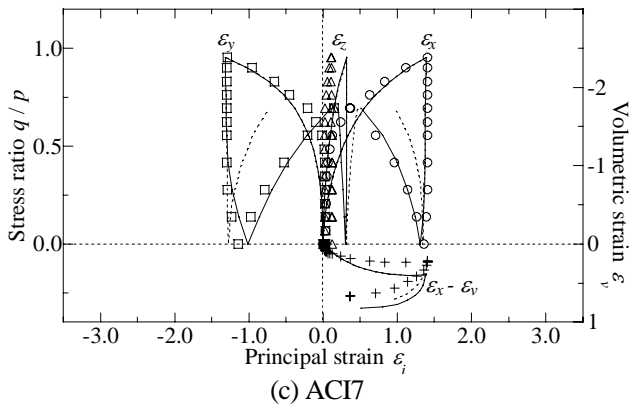
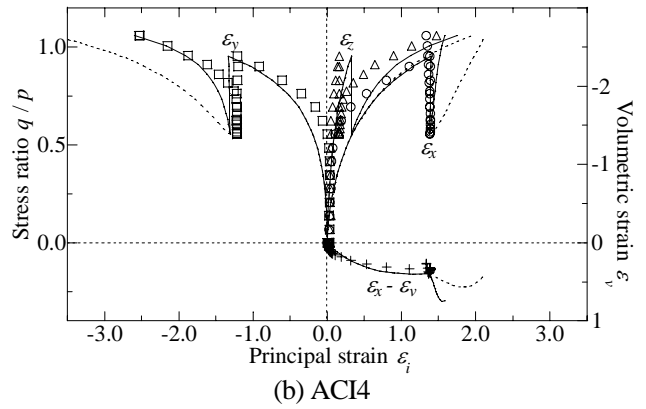
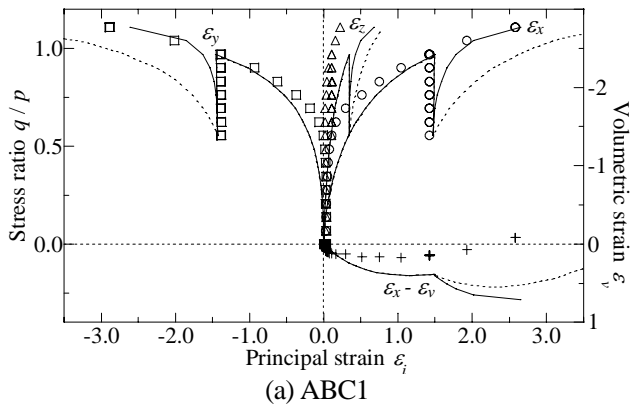


図-10 三主応力試験(経路ACI)の応力ひずみ関係



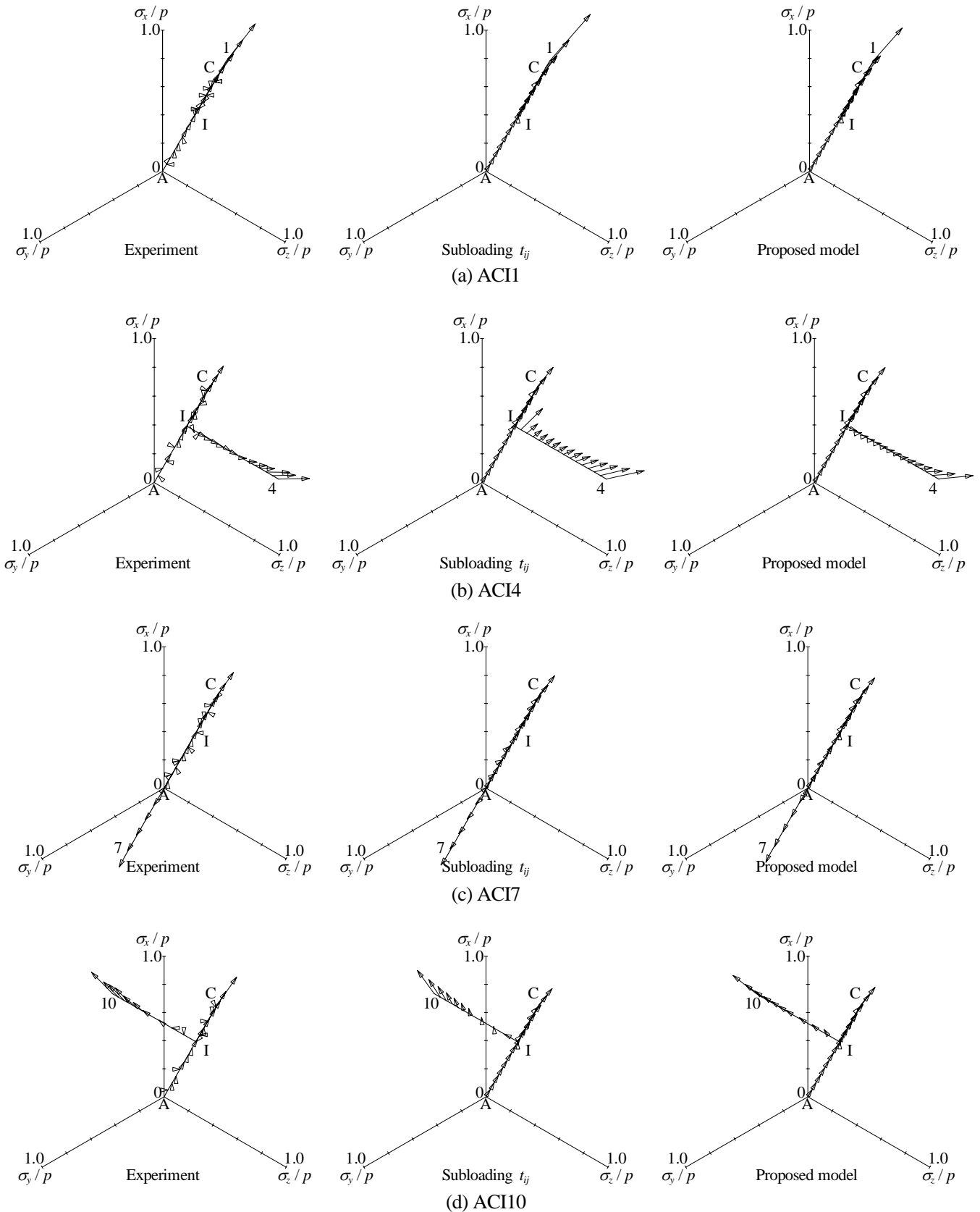


図-11 三主応力試験(経路ACI)の応力経路およびひずみ増分方向

増加に伴う剛性の低下など実測値を概ね捉えていることがわかる。また、同じ応力経路を等方応力の方向へ逆戻りするCからIの経路では、両モデルとも弾性変形のみを生じる除荷が起こるため、実験値に見られるせん断剛性の急激な増加を適切に記述してい

ることがわかる。

弾性変形のみ発生するCからIの応力経路では  $t_{ij}^*$  が不変であるため、I以降の応力経路では提案モデルと Subloading  $t_{ij}$  モデルによる解析値が異なる。Iから1時方向への経路では、応力経路が再び反転するため

応力比が急増する様子が実験値より確認できるが、Subloading  $t_{ij}$  モデルでは下負荷面の作用によって即座に塑性ひずみが発生し、せん断剛性が低下するため実験値を定量的に評価しているとはいえない。一方、提案モデルでは、応力経路の転換に伴う剛性の増加や応力比の増加に伴う剛性の減少を精緻に表現しており、修正応力  $t_{ij}^*$  により応力履歴の影響が適切に考慮されていることがわかる。同様の結果は、応力経路 ACI4 および ACI10 においても確認できる。また、応力経路 ACI4 および ACI10 で、I から 4 あるいは 10 時方向への経路下でのせん断ひずみ増分の方向(図-11(b), (d))を比較すると、Subloading  $t_{ij}$  モデルによる解析値は実験値を必ずしも捉えていないことがわかる。これは、塑性せん断ひずみ増分の方向が応力状態のみにより決まる同モデルでは、応力履歴の影響を受けた実測値を追従できないためである。一方で、提案モデルはひずみ増分の方向・大きさともに実験値を的確に再現しており、関連流動則を仮定したシンプルな等方硬化モデルでも、応力履歴の影響を適切に考慮した修正応力  $t_{ij}^*$  を用いることで、複雑な応力経路下での土の応力ひずみ関係の評価が可能であるといえる。

図-10, 11(c)に示した応力経路 ACI7 では、I から 7 時方向に応力経路が与えられる。Subloading  $t_{ij}$  モデルでも、逆振りせん断に伴う塑性変形の進展を表現することは可能であるが、等方応力状態 A 以前の経路での塑性変形は考慮することができない。一方、提案モデルでは、実験値に見られるような等方応力状態 A 以前の剛性低下やダイレイタンスの発生を表現できることがわかる。

## 6. まとめ

本研究では、中間主応力の影響を適切に考慮した修正応力  $t_{ij}$  の利点はそのままに、中間主応力と応力履歴の影響を簡単かつ統一的に考慮した修正応力  $t_{ij}^*$  へと拡張した。さらに、修正応力  $t_{ij}^*$  を等方硬化型弾塑性モデル(Subloading  $t_{ij}$  モデル)に導入することで、関連流動則に従うシンプルな等方硬化モデルで応力誘導異方性を表現することが可能となった。

提案モデルの適用性は、Leighton Buzzard 砂の三主応力試験の解析により検証した。実験値との比較を通して、提案モデルは3次元応力条件下にある土の複雑な応力経路における応力ひずみ関係を精度良く記述することが示された。

## 参考文献

- 1) Nakai, T and Mihara, Y : A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, vol. 24, No. 2, pp. 82-94, 1984.
- 2) Schofield, A. N. & Wroth, C. P. : *Critical state soil mechanics*, London: McGraw-Hill.
- 3) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc., JSCE*, No. 232, pp. 59-70, 1974.
- 4) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-strain relationship of soil based on the SMP, *Constitutive Equations of Soils*, Murayama, S. & Schofield, A. N. (eds), *Proc. of 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engrg. Spec. Ses. 9*, pp. 205-208, 1977.
- 5) Nakai, T. and Matsuoka, H. : Shear behaviors of sand and clay under three-dimensional stress condition, *Soils and Foundations*, Vol. 23, No. 2, pp. 26-42, 1983.
- 6) Oda, M. : The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand, *Soils and Foundations*, Vol. 12, No. 2, pp. 1-18, 1972.
- 7) Satake, M. : Fabric tensor in granular materials, *Proc. of IUTAM-Conference on Deformation and Failure of Granular Materials*, pp. 63-68, 1982.
- 8) 佐武 正雄: 粒状態の誘導異方性について, *応用力学論文集*, vol.7, pp.725-736, 2004.
- 9) Maeda, K. and Hirabayashi, H. : Influence of grain properties on macro mechanical behaviors of granular media by DEM, *Applied Mechanics*, Vol. 9, pp.623-630, 2006.
- 10) Nakai, T. and Hinokio, M. : A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters, *Soils and Foundations*, Vol. 44, No. 2, pp. 53-70, 2004.
- 11) Nakai, T. and Matsuoka, H. : A generalized elastoplastic constitutive model for clay in three-dimensional stresses, *Soils and Foundations*, Vol. 26, No. 3, pp. 81-98, 1986.
- 12) Hashiguchi, K. and Ueno, M. : Elastoplastic constitutive laws of granular material, *Constitutive Equations of Soils*, Murayama, S. & Schofield, A. N. (eds), *Proc. of 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engrg. Spec. Ses. 9*, pp. 73-82, 1977.
- 13) Alawaji, M. M., Sture, S. and Ko, H. Y. : True triaxial and directional shear cell experiments on dry sand, *Interim technical report*, University of Colorado.