

壁効果を考慮した均一材料の最密充填特性～既往の文献調査による～

名城大学理工学部 正会員 板橋一雄

学生員 大嶽 信二郎・荒金 聡・石井 亮介

1. はじめに

著者らの従来の研究成果では、均一材料の最密充填特性は、充填する容器の大きさと粒子の直径ならびに粒状体の粒子形状などに影響されることが明らかになってきている。その中で著者らは容器の大きさを表現する指標として容器形状係数を提案している¹⁾。この係数によって表現すれば、代表的な最密状態の間隙率（極限間隙率）が定義でき、容器径と粒子径の比とのこの間隙率の間には特徴的な関係のあることがわかってきた²⁾。そこで、これらの結論を再確認するために、既往の文献調査から得たデータを容器形状係数によって再整理し、測定間隙率と極限間隙率を比較したので報告する。なお、採用したデータは植松³⁾(1951)、Scott⁴⁾(1960)、Dickin⁵⁾(1972)、宮森^{6),7)}(1978,1981)、吉村⁸⁾(1994)、井上⁹⁾(1997)、板橋²⁾(2004)らのデータである。

2. 充填特性に関する文献調査

既往の文献調査の結果より、各研究者が行なった充填実験方法とそれぞれ示した最小・最大間隙率(間隙比)に対する影響要因を簡単にまとめた。植松は、立方体の木箱に鋼球をもっとも密になるように規則正しく充填し1段ごとに間隙率を計測した。そして、容器の体積 V と表面積 A との比によって粒状体の密度が変化することを指摘している。Scott は、円筒容器に鋼球を詰めて振動を与え密度を求めた。影響要因としては、植松と同様な考え方である。Dickin は、モールドにガラスビーズを詰めて振動を与え間隙率を求めた。そして、平均粒径が異なっても、最小・最大間隙率ともにほぼ一定であることを示している。宮森は、ガラスビーズを用い学会基準(最大・最小密度試験法)に準拠して実験を行なった。その結果、平均粒径の増加に伴い、最小・最大間隙比は減少・増加を示すが、さらに粒径を大きくすると間隙比は急激に増加する傾向があり、また、粒度幅が広くなり均等係数が大きくなるほど、最小・最大間隙比は減少することを指摘している。吉村も学会基準によって実験を行い、最大間隙比だけではなく、最小間隙比もともに平均粒径の増加に伴い若干減少する傾向があると述べている。井上も学会基準に従って実験を行ない、宮森と同様に、ある点において間隙比が急激に増加する傾向があると指摘し、その点での粒径の値を実験での最大粒径の制限値と考えている。著者らは、充填容器に円柱容器(モールド)と四角柱容器を用い、ステンレス球を充填しフロー試験機で衝撃を与え、層ごとに高さを計測し、間隙率を計算した。この操作を繰り返し、約 400 点のデータを取るによって詳細な最密間隙率の挙動を明らかにすることができた。また、各充填実験における諸条件をまとめたものを表-1 に示す

表-1 充填実験における諸条件

研究者名	充填容器	容器数	試料材料	粒径数
植松(1951)	立方体の木箱	1	鋼球	1
Scott(1960)	円柱容器	1	鋼球	1
Dickin(1972)	モールド	1	ガラスビーズ	4
宮森(1978,1981)	モールド	1	ガラスビーズ	6
吉村(1994)	モールド	1	ガラスビーズ	4
井上(1997)	モールド	9	ガラスビーズ	13
板橋(2004)	モールド、四角柱容器	4	ステンレス球	8

The maximum density of unified granular materials in consideration of Wall Effect

Kazuo Itabashi, Shinjiro Otake, Satoshi Arakane, Ryosuke Ishii (MEIJO University)

3. 極限間隙率の定義

極限間隙率は単純な幾何学的配列を考えた均一球の菱面体シミュレーションを考慮することで求められる。その詳細な理論展開は参考文献¹⁰⁾を参照されたい。ここで、直径 d の球が容器底面に n 個 \times ($n+1$) 個並ぶ (n は偶数とする)、僅かに長方形の容器を考えたとき、容器の各辺の長さは $L_1=n \cdot d$ 、 $L_2=\{(\sqrt{3}/2) \cdot n+1\} \cdot d$ となる。この容器に1個ずつ密に詰め、落し蓋をして供試体の高さを測定する場合、一辺に並ぶ粒子数 n 、充填した粒子数 N 、層数 m (m は偶数とする) とすると、その時の間隙率 $p=1 -$ (充填した球の体積/容器体積) は、次の一般式で与えられる。

$$p(N, m) = 1 - \frac{\pi}{6} \cdot \frac{N}{n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1 \right) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} + m \sqrt{\frac{2}{3}} \right)} \quad (1)$$

また、著者らが、提案している容器形状係数 $R_v =$ (供試体全表面積/体積) は、次式で与えられる。

$$R_v(n, m) = \frac{A}{V} = \frac{2}{n \cdot d} + \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 1 \right) d} + \frac{2}{\left[(m-1) \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \right] d} \quad (2)$$

ある一定の条件の下で式(1)、(2)の計算を実施し、図-1を描いた。なお、粒子径の条件は図中に示してある。図中より容器形状係数による整理結果から、間隙率は二本の直線(破線)の間を、増減を繰り返しながらある一定値に収束する傾向のあることがわかる。

以上には最も一般的な関係を表したが、以下では最上部層に全て充填された状態、すなわち図-1の最下端に着目した議論を進める。すなわち、偶数層の最下端の間隙率に注目すると、図上の勾配が層数に無関係に一定値になることがわかり、その関係を用いると、最密側の間隙率(ここでは、最密間隙率直線といい、図中の破線で示す)は、式(1)の特別な形として式(3)で与えられることがわかる。ただし、奇数層の場合、この直線上にはわずかに乗らない。また、間隙率ではなく間隙比による整理では、こうした直線関係が得られないことがわかったため、本研究では間隙率を使用している。

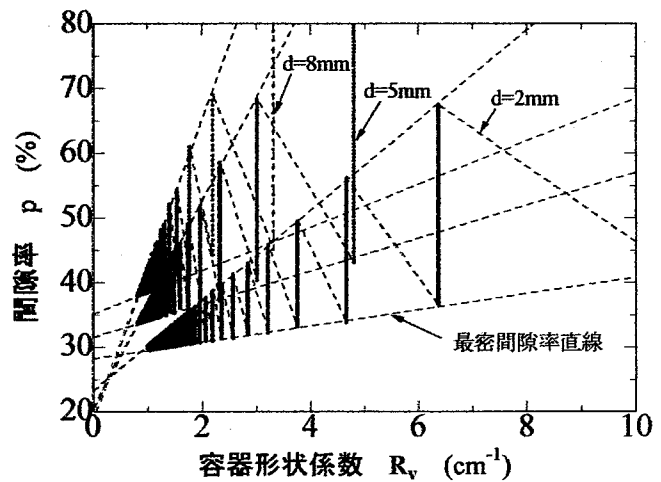


図-1 間隙率と容器形状係数の関係

用いると、最密側の間隙率(ここでは、最密間隙率直線といい、図中の破線で示す)は、式(1)の特別な形として式(3)で与えられることがわかる。ただし、奇数層の場合、この直線上にはわずかに乗らない。また、間隙率ではなく間隙比による整理では、こうした直線関係が得られないことがわかったため、本研究では間隙率を使用している。

$$p = p_0 + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3n+2}} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{(\sqrt{6}-2)n}{\sqrt{3n+2}} \cdot \frac{1}{\left[(m-1) \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \right]} \quad (3)$$

ここに、 $p_0 (=1 - \sqrt{2} \pi / 6 \approx 0.2595)$ は菱面体充填での理論間隙率¹¹⁾である。

ところで、容器の大きさは $L_1=n \cdot d$ 、ならびに $L_2=\{(\sqrt{3}/2) \cdot n+1\} \cdot d$ 、 m 層のときの供試体高さ $h_m=[(m-1) \cdot \{(\sqrt{2/3}) + 1\} \cdot d]$ であるから、式(3)は粒子径 d と容器の大きさ L_1 、 L_2 、 h_m によって次式のように表されることになる。

$$\begin{aligned}
 p &= p_0 + \left(\frac{d}{L_2}\right) \cdot \left[\frac{\sqrt{2}\pi}{6} + \frac{(\sqrt{6}-2)\pi}{12} \cdot \left(\frac{L_1}{h_m}\right) \right] \\
 &= p_0 + \left(\frac{d}{L_2}\right) \cdot \left[a + b \cdot \left(\frac{L_1}{h_m}\right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

ここで充填する容器は僅かに長方形という前提のもとで近似的に、 $L_1=L_2=L$ と仮定すると、式(4)は次式となる。

$$p = p_0 + a \cdot \left(\frac{d}{L}\right) + b \cdot \left(\frac{d}{h_m}\right)
 \tag{5}$$

この式は、容器径・粒径比(d/L)と容器高さ・粒径比(d/h_m)の両者が壁効果を考慮した間隙率 p に影響することを意味する。次いで、容器底面の大きさが一定 (L_1, L_2) で容器高さが増加する場合を考えると、図-1からもわかるように容器形状係数 R_v には極限值が存在することになり、それに対応する間隙率も存在する。実際の充填実験においても容器径が一定で供試体高さのみが増加することより、供試体高さが無限となったとき、容器形状係数には極限值が存在する。ここでは、この間隙率を極限間隙率 p_∞ と定義する。つまり、式(5)において、 $h_m \rightarrow \infty$ とすればよいから、式(6)が得られる。

$$p_\infty = p_0 + a \cdot \left(\frac{d}{L}\right)
 \tag{6}$$

この式は、極限間隙率を考えることによって、供試体高さが無視され、容器径・粒径比 ($d/L, d/D$) のみに依存することを意味し、菱面体充填による極限間隙率の理論線と言える。

4. 既往の文献の再整理

以上の理論を踏まえて、既往の文献より充填実験のデータを極限間隙率で再整理を実施した。まず、各研究者が行なった充填実験の結果を用いて、測定間隙率を容器形状係数で表したものが図-2である。とくに著者らの実験では前述した通り、データ数が400点と多

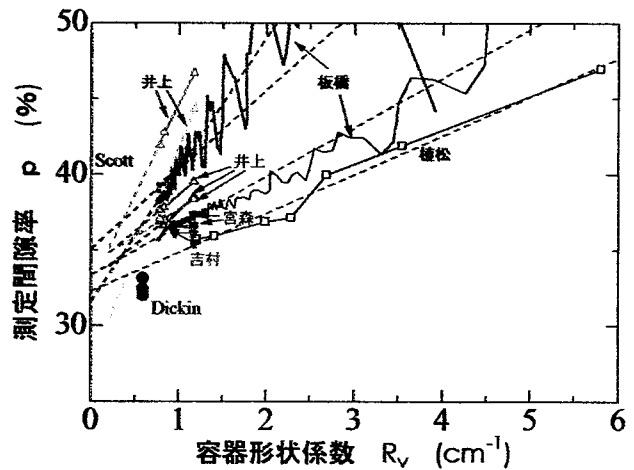


図-2 測定間隙率と容器形状係数の関係

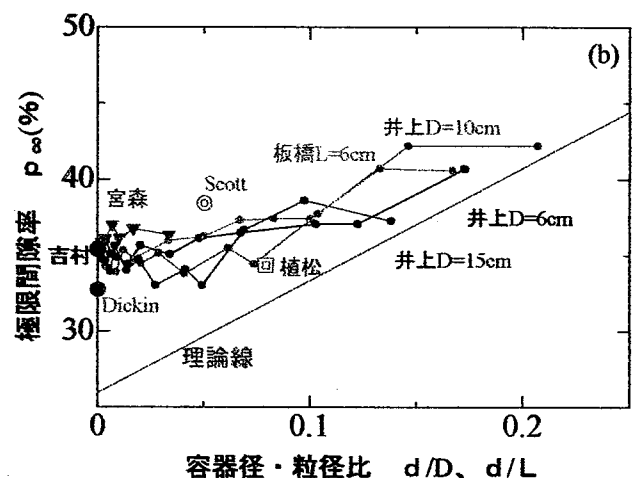
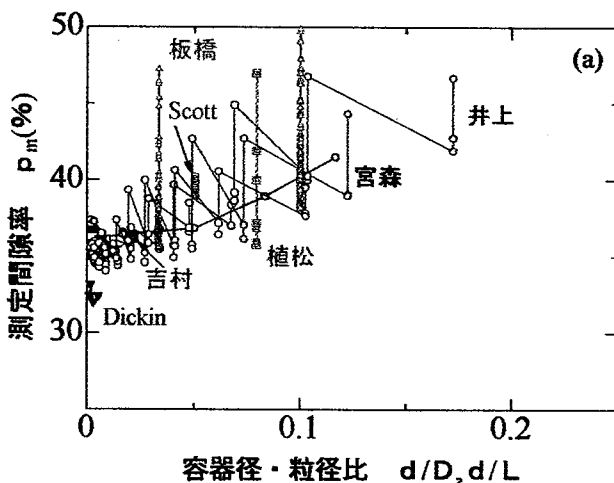


図-3 各間隙率と容器径・粒径比の関係

いため、間隙率が増減を繰返しながらある値へと収束することが顕著にわかる。つまり、その値が極限間隙率である。各実験毎での容器形状係数の極限值がわかっているので、図-2に各プロットの回帰直線を描いて極限間隙率を求めた。そこで、測定間隙率と極限間隙率をそれぞれ容器径・粒径比で整理すると図-3が得られ、両者の間隙率と容器径・粒径比による整理方法を比較してみた。図-3(a)では、測定間隙率は容器径・粒径比が小さくなるにつれて減少する傾向にあることがわかるが、各プロットには、かなりのばらつきがみられる。その原因として、試料を充填する容器の高さや供試体の高さが間隙率に影響を与えると考えられる。つまり、測定間隙率では、充填実験や充填容器が異なる場合、全てのデータを1まとまりで1枚の図に整理することが困難であることを示している。一方、図-3(b)では、極限間隙率も同様に減少傾向がみられ、前者と比べてばらつきの幅が小さくなった。図中より極限間隙率では、容器径 $D=6\text{cm}$, $D=10\text{cm}$, $D=15\text{cm}$ (井上)と異なってもそれぞれが互いに近い値をとって減少していくことがわかり、実験を行った年代や実験方法、充填容器が異なっても同じ図で表されるということである。ここで、容器径・粒径比の減少にともなって極限間隙率が若干大きくなっている。この現象は著者らの研究でもみられる。その要因として、著者らの充填実験においては、フロー試験機による振動が小さい粒径に対しては強すぎるため、菱面体構造が乱されているのではないかと考えられる。

5. まとめ

今回によって得られた結論を要約すると次のようになる。著者らは容器形状係数による極限間隙率を定義して、それを用いた整理方法を提案してきたが、既往の文献のデータを極限間隙率で整理した結果、すべてのデータにおいて著者らの実験結果と同等に近い値が得られた。つまり、均一材料の最密充填実験において極限間隙率と容器径粒径比で整理することの有効性が再認識された。今後の研究課題は、砂などの不均一材料における整理方法を求めることである。

参考文献 1)板橋一雄・松尾稔・内藤充則・神谷圭吾：均一な粗粒材料の粒子形状評価と充填特性,地盤工学会論文報告集,Vol.43,No.1,pp.115-127,2003. 2)荒金聡・石井亮介・内藤充則・板橋一雄：4種類の容器を用いた均一ステンレス球の最密充填特性,第39回地盤工学研究発表会,pp.509-510,2004. 3)植松時雄・土屋健治・岡村進：粒体の充填および摩擦,日本機学会誌,pp.72-77,1956. 4)Scott,G.D. : Packing of Spheres,Nature,Vol.188,pp.908-909,1969. 5)Dickin.E.A. : Influence of Grain Shape and Size upon the Limiting Porosities of Sands.ASTM STP.523,pp.113-120,1972. 6)宮森建樹：粒度分布が砂の最大密度および最小密度に及ぼす影響について,第13回土質工学研究発表会,pp.141-144,1978. 7)宮森建樹：最大密度試験法による粒状体の締固め特性について～とくに粒度との関連において～,砂の相対密度と工学的性質に関するシンポジウム発表論文集,pp.39-40,1981. 8)吉村優治,小川正二：粒状体の間隙比およびせん断特性の及ぼす一次性質の影響,土木学会論文集,No.487/III-26,pp.99-108,1994. 9)井上真理子・藤原身江子・奥山一典：砂の最大・最小試験における最大粒径制限とモールド形状の関係,第32回地盤工学研究発表会,pp.311-312,1997. 10)板橋一雄・内藤充則・森隆・荒金聡,壁効果を考慮した粗粒材料の最密充填特性,第12回調査・設計・施工技術報告会,pp.1-6,2003. 11)最上武雄編著：土質力学第8章,粒状体の力学,pp.893-1036,1969.