

# 種々の繰返し応力条件下における砂の変形・強度特性

名古屋工業大学大学院 学生会員 檜尾 正也  
 名古屋工業大学 正会員 中井 照夫  
 名古屋工業大学 学生会員 吉田 英生  
 名古屋工業大学大学院 学生会員 是永 雄一

## 1.はじめに

一般的にせん断時において、砂は体積圧縮(負のダイレイタンス)をした後、体積膨張(正のダイレイタンス)を起こすが、試料の密度によって、これらの挙動すなわち強度やダイレイタンス特性に違いが見られる。また、排水条件下での繰返しせん断時には負正両方のダイレイタンスを示しながら体積圧縮し、最終的にはそれ以上体積圧縮が起こらない定常状態に至り、せん断剛性は繰返しせん断が進むにつれて大きくなることが知られている。現在、このような試験結果を参考にして構成モデルの研究は盛んに行われているが、特に繰返しせん断時の砂の挙動を適切に表現できるモデルはいまだ構築されていない。

本研究では従来から提案されている砂の移動硬化型の弾塑性モデル(kinematic  $t_{ij}$  sand model)<sup>1)</sup>を密度の異なる砂の挙動への影響や繰返し载荷時の体積ひずみの定常化を表現できるように拡張し、実測値との比較検討を行った。

## 2.提案モデルの概要

従来のモデルでは修正応力  $t_{ij}$  に基づいた応力比 ( $t_s/t_N$ )、ひずみ増分比 ( $-d\varepsilon_{SMP}^*/d\gamma_{SMP}^*$ ) を用いた整理から、応力比 ( $t_s/t_N$ ) とひずみ増分比 ( $-d\varepsilon_{SMP}^*/d\gamma_{SMP}^*$ ) との間に直線関係が成り立つと仮定することにより降伏曲面の形状が決定されたが、今回の提案モデルでは Chowdhury, Nakai の stress-dilatancy 式<sup>2)</sup>を参考に(1)式から(2)式に変更する。

$$-\frac{d\varepsilon_{SMP}^{*p(AF)}}{d\gamma_{SMP}^{*p(AF)}} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{t_s}{t_N} - M^* \right) \quad (1)$$

$$-\frac{d\varepsilon_{SMP}^{*p(AF)}}{d\gamma_{SMP}^{*p(AF)}} = \frac{\left( \frac{t_s}{t_N} \right)^\beta - (M^*)^\beta}{\left( \frac{t_s}{t_N} \right)^{\beta-1}} \quad (2)$$

ここに、 $M^*$  は stress-dilatancy 線の切片である。

この結果、降伏関数  $f$  は(3)式から(4)式となる。

これらの stress-dilatancy 関係図を Fig.1 に降伏曲

面の形状を Fig.2 に示す。この変更によって、降伏曲面は滑らかな外に凸の形状となり、原点および降伏曲面の足 ( $t_N=t_{N1}$ ) における特異点が存在しなくなる。また塑性パラメータとしては、粘土のモデルと同様  $\varepsilon_v^p$  を用いる。

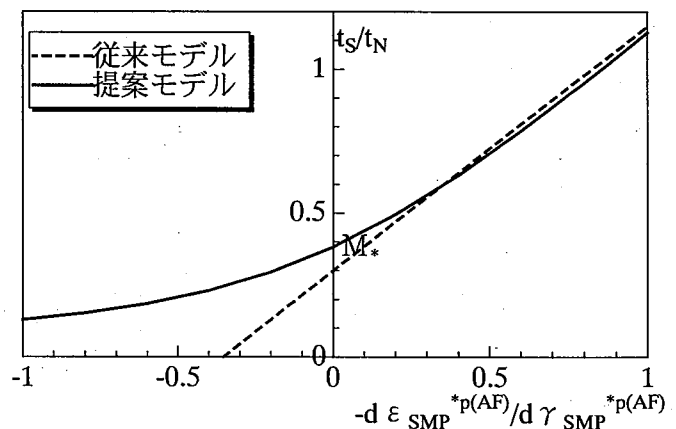


Fig.1 stress-dilatancy 関係図

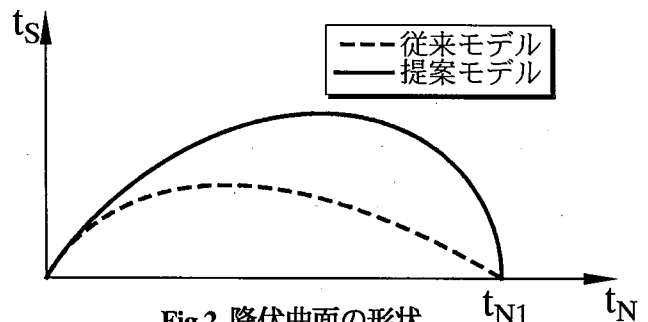


Fig.2 降伏曲面の形状

$$f = \ln t_N + \frac{-\alpha}{1-\alpha} \ln \left| 1 - (1-\alpha) \frac{X}{M^*} \right| - H(\varepsilon_v^p) = 0 \quad (\alpha \text{ は土質パラメータ}) \quad (3)$$

$$f = \ln t_N + \frac{1}{\beta} \left( \frac{X}{M^*} \right)^\beta - H(\varepsilon_v^p) = 0 \quad (\beta \text{ は土質パラメータ}) \quad (4)$$

また、従来のモデルでは関連流動則に従う塑性ひずみ増分  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p(AF)}$  および比例係数  $\Lambda$  は次の式で表された。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p(AF)} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t_{ij}}, \quad \Lambda = \frac{C_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{lm}} \dot{\sigma}_{lm}}{\frac{\partial f}{\partial t_{kk}}} \quad (5)$$

ここに、 $C_p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e}$  である。

この従来モデルでは、密度の異なる試料の解析を同一パラメータで行うことはできなかった。そこで、密度の影響を表現するため橋口の下負荷面の概念<sup>3)</sup>を参考にして上式  $\Lambda$  を

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p(AF)} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t_{ij}}, \quad \Lambda = \frac{C_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{lm}} \dot{\sigma}_{lm}}{\frac{\partial f}{\partial t_{kk}} + \frac{G(d)}{t_N}} \quad (6)$$

$$G(d) = ad^2 \quad (a \text{ は土質パラメータ}) \quad (7)$$

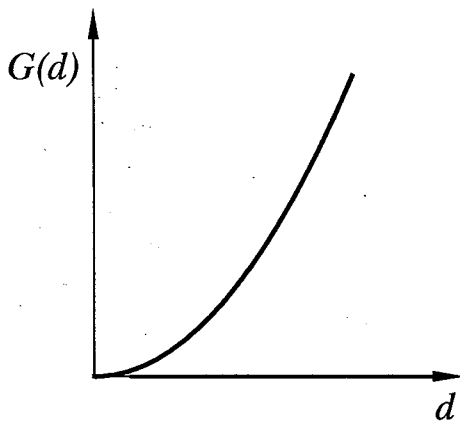


Fig.3  $G(d)$ と  $d$  の関係

とする。 $G(d)$ は Fig.3 のように  $d$  の単調増加関数であり、 $d$  は密度を表すパラメータで、

Fig.4 で示すように  $d = (\lambda - \kappa) \ln \left( \frac{t_{N1e}}{t_{N1}} \right)$  で表

され、同じ応力状態で現在の空隙比(A)と正規

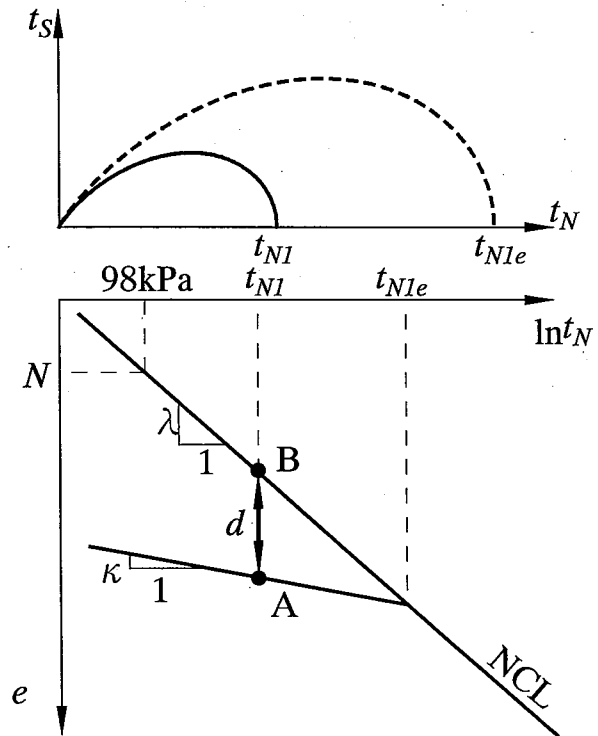


Fig.4 密度を表すパラメータ  $d$

圧密状態での間隙比(B)との差を表し、以下のようになる。

$d=0 \Rightarrow$  正規状態 ( $\Lambda$ は従来のモデルと一致：剛性が低い)  
 $d>0 \Rightarrow$  過圧密状態 ( $\Lambda$ は従来のモデルより小さい：剛性は高い)

この  $d$  によって密な砂を過圧密状態として扱うことによって、密度の異なる試料のせん断時の強度や変形特性への影響を考慮することができる。

しかし、この  $d$  の効果だけでは繰返しせん断時の体積ひずみの定常化や剛性の増加を表現することはできない。そこで、繰返し履歴によって塑性ひずみ増分  $\dot{\epsilon}_{ij}^{p(AF)}$  が減少するように比例係数  $\Lambda$  の分母に  $C(t_{N1})$  をかけることにより、以下の式とする。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{p(AF)} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t_{ij}}, \quad \Lambda = \frac{C_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{lm}} \dot{\sigma}_{lm}}{\left( \frac{\partial f}{\partial t_{kk}} + \frac{G(d)}{t_N} \right) \cdot C(t_{N1})} \quad (6)$$

ここで  $C(t_{N1})$  は  $C(t_{N1}) \geq 1$  を満たす繰返し履歴の関数であり、様々な応力の変化に対して一般的に扱えるように降伏曲面の足  $t_{N1}$  を用いて定式化を行った。その  $C(t_{N1})$  の関数形を Table.1 に示す。この  $C(t_{N1})$  の定式化では、負荷時と遷移時で異なる2つの関数を使い分け、その2つの関数を連続的につなげることで、繰返し負荷による体積ひずみの定常化や剛性の増加が生じて、繰返し負荷時以上の応力を受けると最終的には単調せん断と同じ状態に至る事を表現可能としている。具体的に Fig.5 で示すような片振りの繰返しせん断試験を例にして説明すると、初期負荷時に  $C(t_{N1})$  は 1 を保つが、繰返し載荷時には単調増加 ( $C(t_{N1}) > 1$ ,  $dC(t_{N1}) > 0$ ) することにより、体積ひずみの定常化や剛性の増加を表現し、繰返し載荷時以上の応力を受けた場合(遷移時)には  $C(t_{N1})$  が 1 に戻る関数とすることにより、その後の挙動が連続的かつすみやかに初期負荷時に一致する。

Table.1 中の  $r, m$  は土質パラメータであり、 $t_{N1U}$  は応力履歴の中で最大の  $t_{N1}$  の値、 $C(t_{N1})_0, t_{N1U0}$  はそれぞれ遷移時から負荷時、繰返し時から遷移時に移行するときの  $C(t_{N1}), t_{N1U}$  の値である。

Table.1  $C(t_{N1})$  の定式

初期負荷時 繰返し時	$C(t_{N1}) = r \left( \frac{\int dt_{N1} - 1}{t_{N1U}} \right) + C(t_{N1})_0 - 1$ <p style="text-align: center;">初期負荷時には <math>C(t_{N1})_0 = 1</math></p>
遷移時	$C(t_{N1}) = -\ln \left( \frac{t_{N1} - b}{m} \right) + 1$ $b = t_{N1U0} - m \cdot \exp(1 - C(t_{N1})_0)$

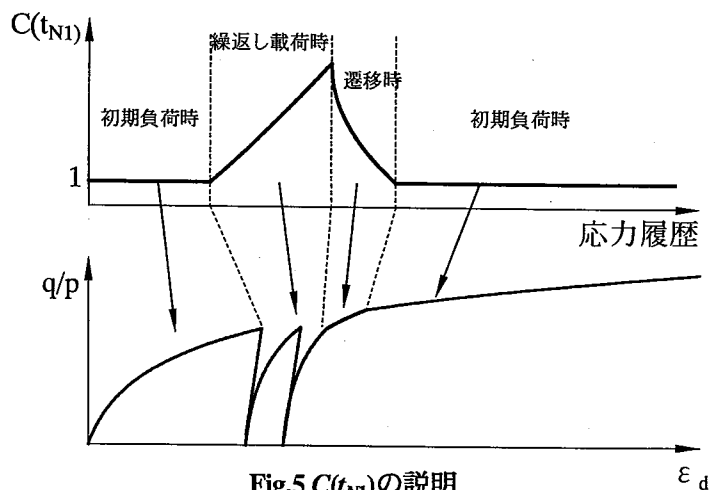


Fig.5  $C(t_{N1})$  の説明

$C(t_{N1}) = 1 \Rightarrow$  単調負荷状態  
 ( $\Lambda$ は密度の変化を考慮したモデルと一致)  
 $C(t_{N1}) > 1 \Rightarrow$  繰返し載荷による負荷状態  
 ( $\Lambda$ が小さくなることにより剛性の増加とひずみの定常化を表現)

### 3.実測値と解析値の比較と考察

Fig.6 は密度の違う試料を平均主応力一定( $p=196\text{kPa}$ )条件下で三軸圧縮せん断時の実測値と提案モデルによる解析値の応力~ひずみ関係のグラフである。○プロットは密な試料( $e=0.66$ )、●プロットはゆるい試料( $e=0.83$ )での実測値であり、これらに対応した解析値を実線、破線で示す。密な試料では典型的な砂の挙動である正のダイレイタンスーやひずみ軟化を示しており、またゆるい試料は正のダイレイタンスーを示してはいるがほとんどひずみ軟化せず正規状態に近い挙動となっている。解析では、 $C(t_M)$ は1のままであるので、密度の違いによる応力~ひずみ関係への影響は、 $d$ による $\Lambda$ の値の変化によって生じることとなる。この図から解析値は正のダイレイタンスーやひずみ軟化現象など実測値と良い対応をしており、 $d$ を導入したことにより構成式が密度の違いによる砂の挙動への影響をうまく表現できていることがわかる。

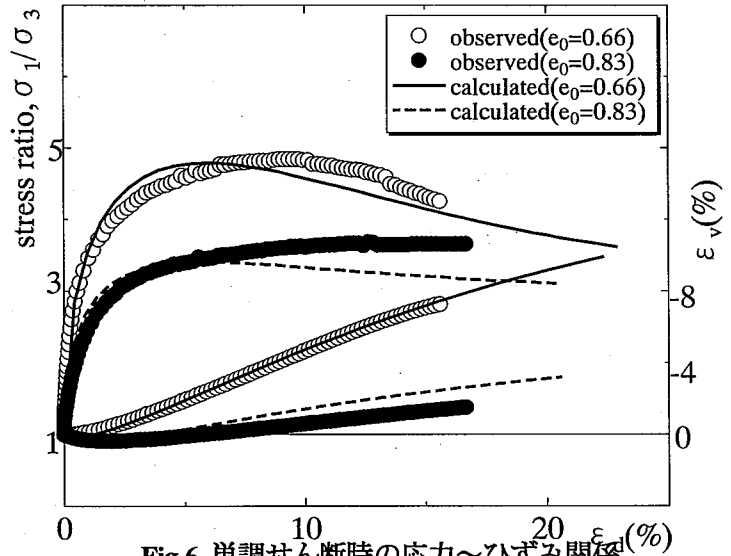


Fig.6 単調せん断時の応力~ひずみ関係

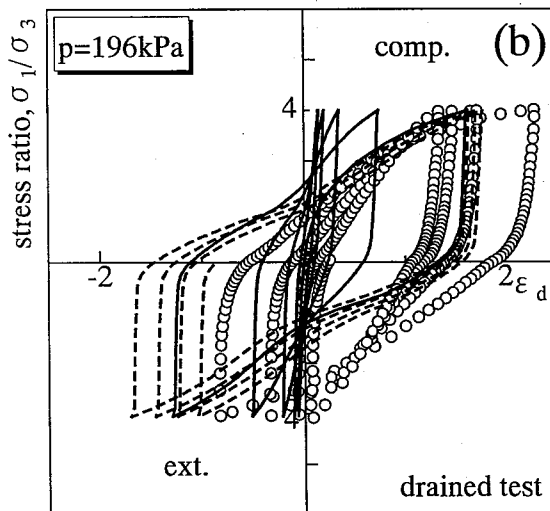
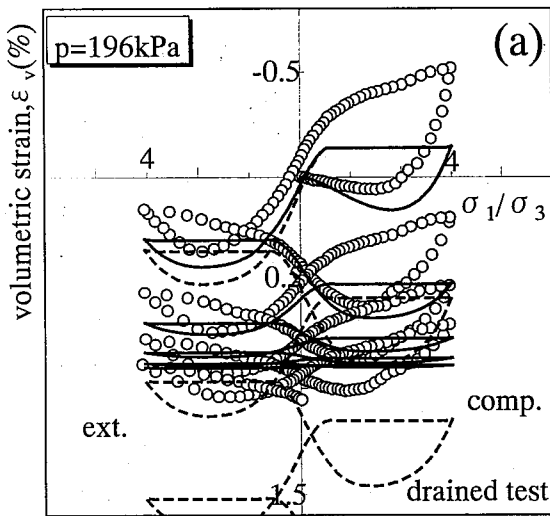


Fig.7 主応力比4での繰返しせん断時の応力~ひずみ関係 (移動硬化モデルによる解析)

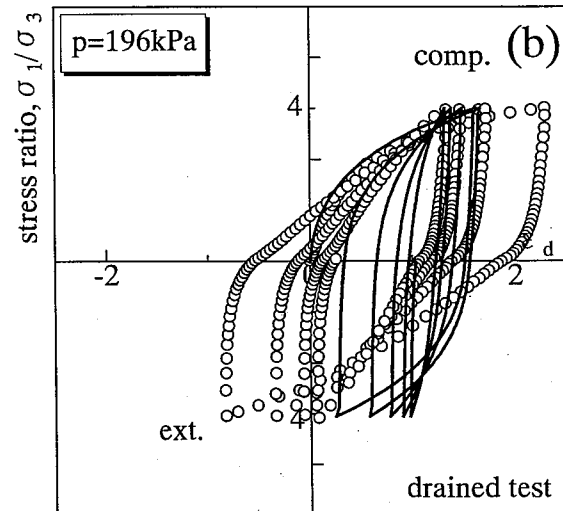
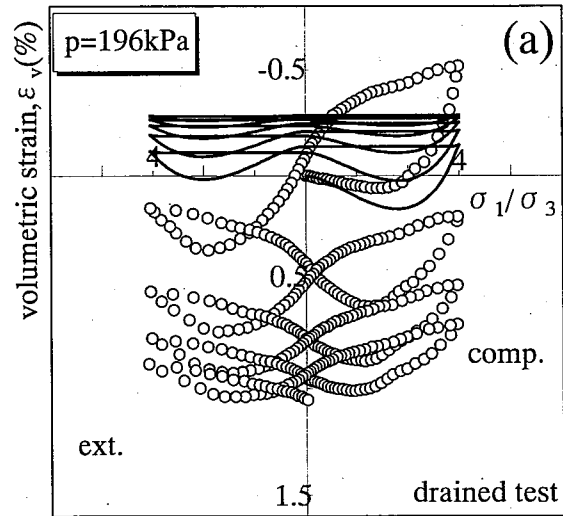


Fig.8 主応力比4での繰返しせん断時の応力~ひずみ関係 (等方硬化モデルによる解析)

次に、平均主応力一定条件下( $p=196\text{kPa}$ )で、主応力比( $\sigma_1/\sigma_3$ )が4の両振り排水繰返しせん断試験を行った時の実測値と解析結果を Fig.7 に示す。(a)図は主応力( $\sigma_1/\sigma_3$ )～体積ひずみ( $\varepsilon_v$ )関係、(b)図は偏差ひずみ( $\varepsilon_d$ )～応力比( $\sigma_1/\sigma_3$ )関係である。実測値は○プロット、提案モデルによる解析値を実線で示す。また、比較のため  $C(t_{M1})$  の効果が含まれない解析値を破線で示す。(a)図から実測値(○プロット)は正負両方のダイレイタンスーを示しながら体積圧縮していき、最終的には体積ひずみの定常化に至っている。また、(b)図から、繰返し回数が進むにつれて剛性が高く(ひずみの発生量が小さくなっていき同じループを描くようになるのが分かる。このような実測値で見られる体積ひずみの定常化や剛性の増加を、密度の変化だけを考慮したモデルによる解析値(破線)では表現できないが、 $C(t_{M1})$  を導入したことによって、解析値(実線)は実測値の傾向をよく表現できている。一方、同様の繰返しせん断の解析を等方硬化型のモデルで行ったものを Fig.8 に示す。等方硬化型のモデルでは実測で見られるような等方応力状態近傍での体積圧縮を表現できず、体積変化の定常化は表現できるものの、繰返し回数が進むにつれ、体積膨張が進行している。この様に除荷時をすべて弾性とする等方硬化型モデルでは実測値を適切に表現できない。

また、Fig.9 で示すように主応力比( $\sigma_1/\sigma_3$ )が3の排水両振り繰返しせん断試験においても、繰返

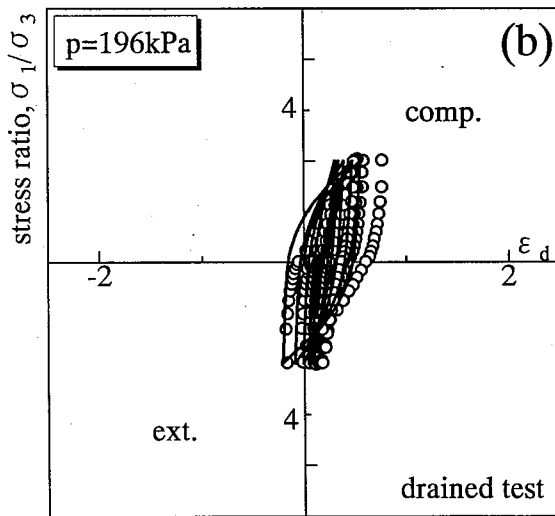
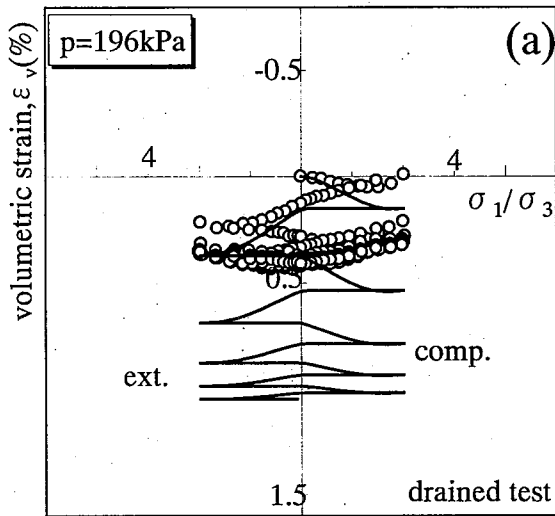


Fig.9 主応力比3での繰返しせん断時の応力～ひずみ関係 (移動硬化モデルによる解析)

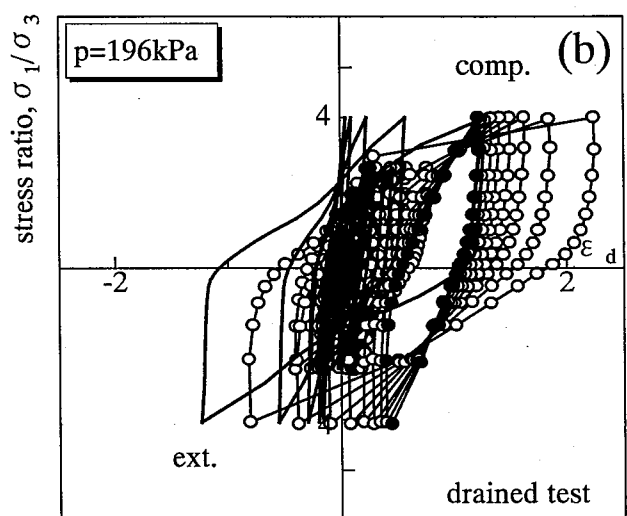
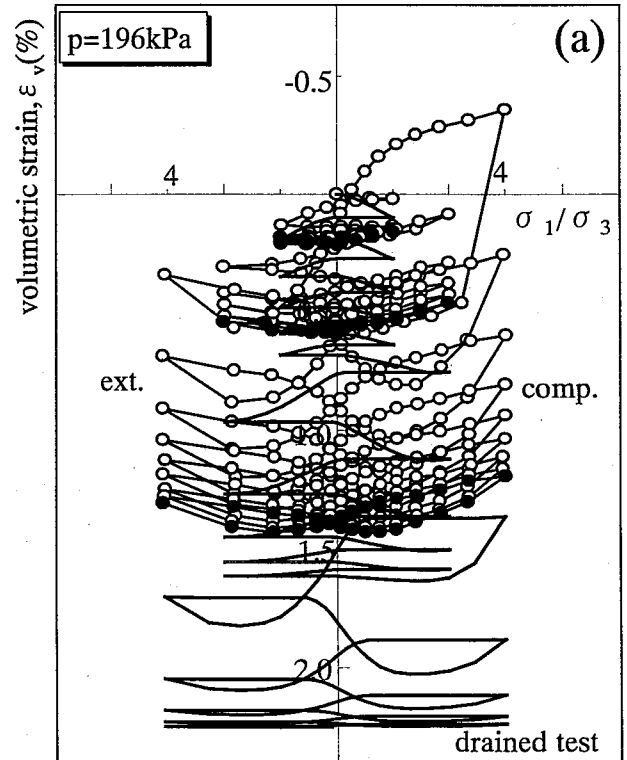


Fig.10 主応力比2⇒3⇒4での繰返しせん断時の応力～ひずみ関係(移動硬化モデルによる解析)

し回数が進むにつれ体積ひずみの定常化や剛性の増加が実測値(○プロット)から見られる。体積ひずみを過大に評価してはいるが実測値の傾向を解析値(実線)は、うまく表現しているといえる。

Fig.10 は平均主応力一定条件下( $p=196\text{kPa}$ )で主応力比( $\sigma_1/\sigma_3$ )を  $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$  と段階的に応力比振幅を増やしていく排水両振り繰返しせん断試験の実測値(○,●プロット)と解析値(実線)のグラフである。図中の●プロットは各繰返し段階で最後の繰返し時の実測値である。この図から各繰返しせん断段階で体積ひずみの定常化が生じているが、より大きい応力比のせん断を受けることによって、さらに体積圧縮が進行していることがわかる。解析結果では、応力比の低い繰返しせん断での体積圧縮を過大に評価しているが、実測値に見られるように一度定常化に至った後、より大きい応力比でのせん断を受けるとさらに体積圧縮が進むことを表現できている。

この様にモデルに  $C(t_{N1})$  を導入したことによって、実測値で見られる繰返し時における体積ひずみの定常化や剛性の増加を解析値はうまく表現している。

今回の解析に用いたパラメータを Table.2 に示す。今回の拡張で追加されたパラメータは  $a$ ,  $r$ ,  $m$  の3つである。

Table.2 土質パラメータ

$\lambda$	0.035
$\kappa$	0.0045
$N$	1.024
$RCS$	2.8
$\beta$	2.0
$a$	50
$r$	1.2
$m$	1.0
$\nu$	0.0

#### 4.結論

従来のモデルでは土質パラメータの値を変えることなく密度の影響を表現することができなかったが、今回の提案モデルでは密度を表すパラメータ  $d$  を導入することにより同一のパラメータで密度の異なる試料のせん断時の変形・強度特性への影響を表現可能となった。

繰返し履歴の影響を考慮するため  $C(t_{N1})$  を移動硬化型の弾塑性構成モデル(kinematic  $t_{ij}$  sand model)に導入したことによって繰返し載荷時のひずみの定常化や剛性の増加が表現可能となった。

#### 参考文献

- 1) T.Nakai, J.Fujii & H.Taki (1989): kinematic extension of anisotropic hardening model for sand, Proc. NUMOG III, pp.36-45
- 2) E.Q.Chowdhury, T.Nakai (1998):Consequences of the  $t_{ij}$ -concept and a new modeling approach, Computers and Geotechnics 23 (1998) 131-164
- 3) 橋口 公一 (1990): 最新弾塑性学 , 朝倉出版