

# 動的繰り返し荷重による残留変形に及ぼす幾何学的形状変化の影響

名古屋大学 正 大塚 悟  
大林組 正 小島眞志  
名古屋大学 正 松尾 稔

## 1. はじめに

微小変形理論に基づく動的変形解析では初期状態を基準にしてひずみを算定する。したがって、大変形が生じる問題では構造物の幾何学的変形による影響を考慮することができない。ところが動的問題の場合には単にひずみの高次項を無視したというだけではなく、構造物に作用する重力や慣性力を変形した物体にではなく、初期の形状に作用させる点に大きな問題がある。特に、初期状態においてはこれらの物体力がそれほど構造物全体に影響を与えない場合にも、変形した物体に物体力が作用すると構造物の変形を促進させたり、ある場合には破壊にまで至らせる原因となることがある。

本論文は構造物の破壊時における挙動を表現することの可能な構成式として剛塑性仮定を用いる。この構成式は応力・ひずみ速度型の構成関係であり、基本的には応力履歴に無関係に注目した時点の境界値問題にのみ応じて解が求められる性質がある。この性質に基づいて構造物の運動による幾何学的形状の変化の及ぼす影響を近似的に取り入れる解析を行い、その影響の程度についていくつかの数値解析を通して検討する。

## 2. 剛性構成式を用いた動的変形解析

### 2.1 剛塑性仮定と制約条件

地震のような動的荷重の载荷時間は通常短いことから、ここでは地盤が非排水条件で挙動すると仮定して土の降伏関数に *Mises* 基準を用いる。

$$f = \frac{1}{2} (s \cdot s - \sigma_0^2) = 0 \quad (1)$$

上式の  $\sigma_0$  は *Mises* の強度定数であり、土の非排水強度に対応する。関連流れ則を適用すると次式のように応力・ひずみ速度関係が得られる。

$$\dot{\epsilon} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \lambda s = \frac{\dot{\epsilon}}{\sigma_0} s, \quad \dot{\epsilon} = \sqrt{\dot{\epsilon} \cdot \dot{\epsilon}} \quad (2)$$

上式では塑性係数  $\lambda$  を等価塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}$  を用いて表した。この式では応力と塑性ひずみ速度の主軸が一致し、その大きさは塑性係数によって関連づけられる。剛塑性構成式では塑性係数が一般に不定であり、その大きさについては別途の論理によって定められなければならない。

*Mises* 基準による剛塑性構成式では次のように

$$\dot{\epsilon}_v = 0 \quad (3)$$

体積ひずみ速度がゼロになる。したがって体積が一定に保たれる条件の下で地盤のせん断変形が生じる。この条件は先に述べた非排水条件に対応している。式(3)は *Mises* 基準に基づく剛塑性体の満たすべき条件であり、地盤の運動に関する制約条件と見なされる。

### 2.2 拘束運動と構成式

---

Effect of Geometric Change on Residual Deformation Under Dynamic Loading

Ohtsuka, Satoru (Nagoya Univ.), Kojima, Masashi (Ohbayashi-gumi) and Matsuo, Minoru (Nagoya Univ.)

Mises 基準に基づく剛塑性体の仮想内部仕事率は式(3)の条件から次のように偏差応力と塑性ひずみ速度増分との内積となる。

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dv = \int_V \boldsymbol{s} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dv \quad (4)$$

式(4)に注意して仮想内部仕事率と外力仕事率を等値すると次式になる。

$$\int_V \boldsymbol{s} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dv + \int_V \mu \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v dv = \int_S \boldsymbol{t} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{u}} ds + \int_V \rho \boldsymbol{g} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{u}} dv - \int_V \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{u}} dv \quad (5)$$

上式では Mises 基準に基づく剛塑性体の運動を式(3)の制約条件の下での拘束運動と捕らえて、Lagrange の未定係数  $\mu$  を用いて式(3)の条件を導入している。また  $\rho$  は地盤の質量密度を表す。上式が任意の変位速度増分に対して成立するときに、次の局所形式に帰着する。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{s} + \mu \boldsymbol{I}) + \rho \boldsymbol{g} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad (6)$$

ここで、Lagrange の未定係数  $\mu$  を平均応力と見なすと上式は運動方程式に一致することが分かる。この関係に着目すると Mises 基準に基づく剛塑性構成式は式(2)に代わって次式となる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_o \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\dot{\epsilon}} + \mu \boldsymbol{I} \quad (7)$$

ただし、式(7)の構成式は常に制約（拘束）条件である式(3)の体積ひずみ速度 = 0 条件と共に用いられなければならない。Lagrange の未定係数  $\mu$  は不定の定数であるが、境界値問題を解くことによって定められる。

### 2.3 剛塑性動的変形解析

式(7)の剛塑性構成式を用いて運動方程式を有限要素離散化して記述すると次式を得る。

$$\left( \int_V \sigma_o \frac{\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{B}}{\dot{\epsilon}} dv \right) \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{u}} + \ddot{\boldsymbol{u}}) \quad (8)$$

上式に用いた記号は表1の通りである。

拘束条件の式(3)も同様に有限要素離散化によって

$$\boldsymbol{L} \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \quad (9)$$

のように表される。式(8),(9)は連立して解かれる。その際に各変数を時間  $\Delta t$  で次のように離散化して表す。 $n$  は着目する時間ステップを表す。

$$\dot{\boldsymbol{u}}_n = \dot{\boldsymbol{u}}(\Delta t \cdot n), \quad \ddot{\boldsymbol{u}}_n = \ddot{\boldsymbol{u}}(\Delta t \cdot n) \quad (10)$$

Wilson の  $\theta$  法を用いると、式(8), (9)は相対加速度に関する連立方程式になり、各時刻において刻々と相対加速度、相対速度、相対変位が求められる。しかし、式(8)は相対加速度に関する非線形式になることから、

表1 有限要素離散化記号

$\boldsymbol{B}$	ひずみ～節点変位マトリックス
$\boldsymbol{Q}$	工学ひずみ～ひずみ変換マトリックス
$\boldsymbol{L}$	体積ひずみ～節点変位マトリックス
$\boldsymbol{M}$	質量マトリックス
$\boldsymbol{F}$	等価節点荷重ベクトル
$\ddot{\boldsymbol{u}}$	節点相対加速度ベクトル
$\dot{\boldsymbol{u}}$	節点相対速度ベクトル
$\boldsymbol{u}$	節点相対変位ベクトル
$\ddot{\boldsymbol{u}}$	節点入力加速度ベクトル

解析に当たっては *Newton-Raphson* 法を用いた繰り返し計算を行う。

式(2)に示す剛塑性構成式は塑性係数が不定のためにひずみ速度の大きさが不定になる。しかし、式(8)の運動方程式によってひずみ速度の大きさが加速度に関連づけられて、刻々の時刻にて一意的に定められる。

### 3. 平面ひずみ圧縮試験の数値シミュレーション

#### 3.1 剛体運動の記述

剛塑性構成式は式(7)のように応力とひずみ速度を用いて記述される。しかし、この関係は構造物内の応力が降伏関数を満足する際に従う構成関係であり、構造物が降伏していない場合に構造物は剛体運動をするためにひずみ速度はゼロになる。ところが、前章の剛塑性動的変形解析ではひずみ速度から定められる応力を用いて運動方程式を解くために、構造物全域における塑性条件を仮定した解析になっている。また、式(7)から剛体運動について考えると、等価塑性ひずみ速度がゼロになるために分母がゼロとなって式(7)を用いた解析は不可能になる。そこでこの問題を解決するために、等価塑性ひずみ速度に敷居値  $\dot{\epsilon}_0$  を設けて、剛塑性構成式を次のように修正する。

$$s = \sigma_0 \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} + \mu I \quad \text{when } \dot{\epsilon} \geq \dot{\epsilon}_0 \quad (11)$$

$$s = \sigma_0 \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} + \mu I \quad \text{when } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \quad (12)$$

ここに、敷居値  $\dot{\epsilon}_0$  は十分に小さく設定する。応力が降伏関数を満足する場合に式(11)が用いられる。この場合に等価塑性ひずみ速度は敷居値より大きい。他方、剛体運動の場合には式(12)が用いられる。この場合の等価塑性ひずみ速度は敷居値より明らかに小さい。式(12)を書き直すと次式のように表されて、

$$s = \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \left( \sigma_0 \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} \right) + \mu I \quad (13)$$

*Mises* の強度定数が等価塑性ひずみ速度と設定した敷居値の比によって割り引かれていることが分かる。したがって応力は本来の降伏関数の内側に位置し、且つ塑性ひずみ速度も敷居値より小さいことから、式(13)によって近似的に剛体運動を模擬することができる。

#### 3.2 解析精度の検討

図1は平面ひずみ条件における有限要素メッシュである。今この試料の平面ひずみ条件における強度を  $c_u = 10 \text{ kN/m}^2$  とし、上面に一様に荷重を載荷する。載荷速度は  $\dot{q} = 1.0 \text{ kN/m}^2/\text{sec}$  と設定する。この問題を剛塑性動的変形解析によってシミュレートして、解析の精度について検討する。図2は等価塑性ひずみ

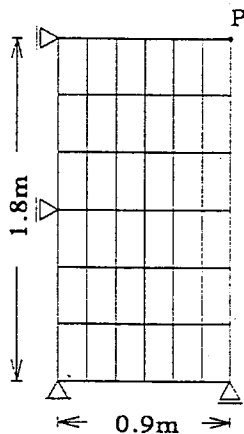


図1 有限要素メッシュ

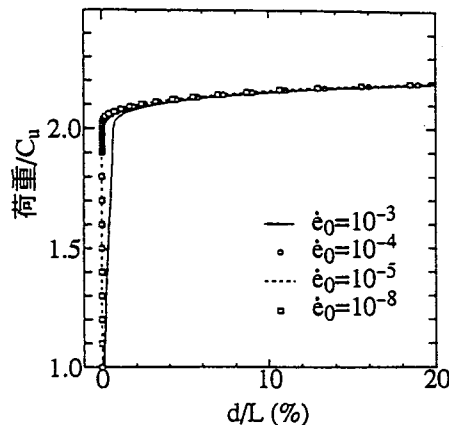


図2 敷居値  $\dot{\epsilon}_0$  の影響

速度に関する敷居値を変化させた場合の解析結果である。図の縦軸は荷重を非排水強度で基準化し、横軸は図1におけるP点の鉛直変位を供試体長さで基準化している。図では敷居値にかかわらず、初期の剛体運動、並びに上載荷重  $2c_u$  にて急激に変形が生じる傾向が表現され、妥当な解析結果を与えている。しかし、敷居値を大きくとると本来剛体運動をすべき領域において若干の変形が生じていることが分かる。 $2c_u$  を 越えても荷重が載荷できるのは、変形の増加と共に慣性力が生じて荷重を支持するように作用するためである。

次に解析に用いる時間間隔  $\Delta t$  の影響について考察しよう。図3(A), (B)は等価塑性ひずみ速度における敷居値と共に時間間隔を変えて行った計算の一例である。図から、等価ひずみ速度に関する敷居値を  $\dot{\epsilon}_0 = 10^{-8}/sec$  のように小さく設定した場合には、時間間隔を小さく設定しないと誤差が大きく現れるのに対して、等価ひずみ速度に関する敷居値を  $\dot{\epsilon}_0 = 10^{-3}/sec$  にとった場合には時間間隔の影響がそれほど顕著に現れないことが分かる。時間間隔を短く設定して解析を行うと一般に計算量は膨大になるので、単に等価塑性ひずみ速度の敷居値を小さく設定することが必ずしも数値解析において合理的とはいえない。本論文では以下、等価塑性ひずみ速度の敷居値に  $\dot{\epsilon}_0 = 10^{-3}/sec$  , 時間間隔に  $\Delta t = 0.1 sec$  を用いることとする。

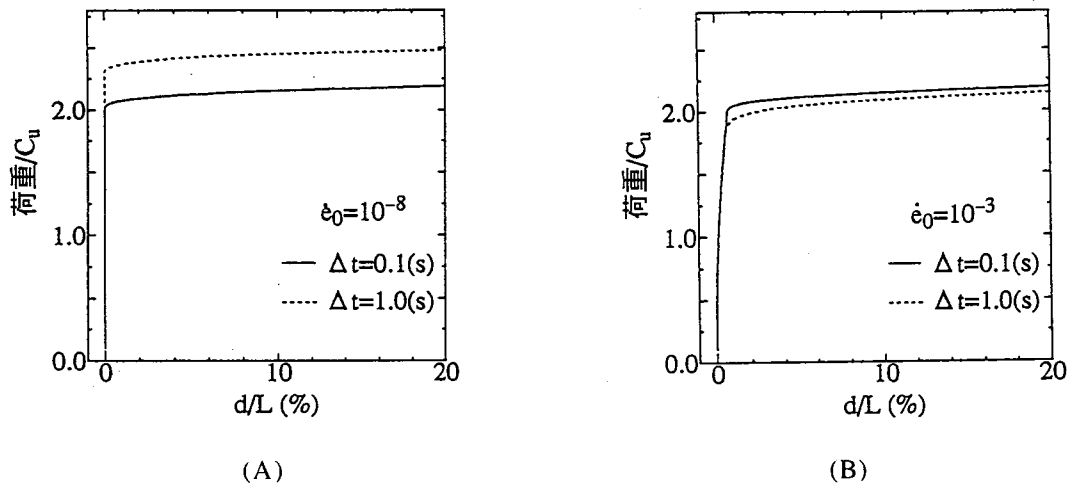


図3 敷居値と時間間隔

図4は荷重履歴によって異なるP点の変形を表している。(A)図では荷重が支持力を越えるあたりで急激に変形が生じ始めて、荷重の保持と共に変形が加速度的に生じている。他方(B)図では荷重の載荷・除荷による構造物の変形挙動の変化を表す。等価ひずみ速度に対する敷居値の影響で本来剛体運動をすべき部分で若干変

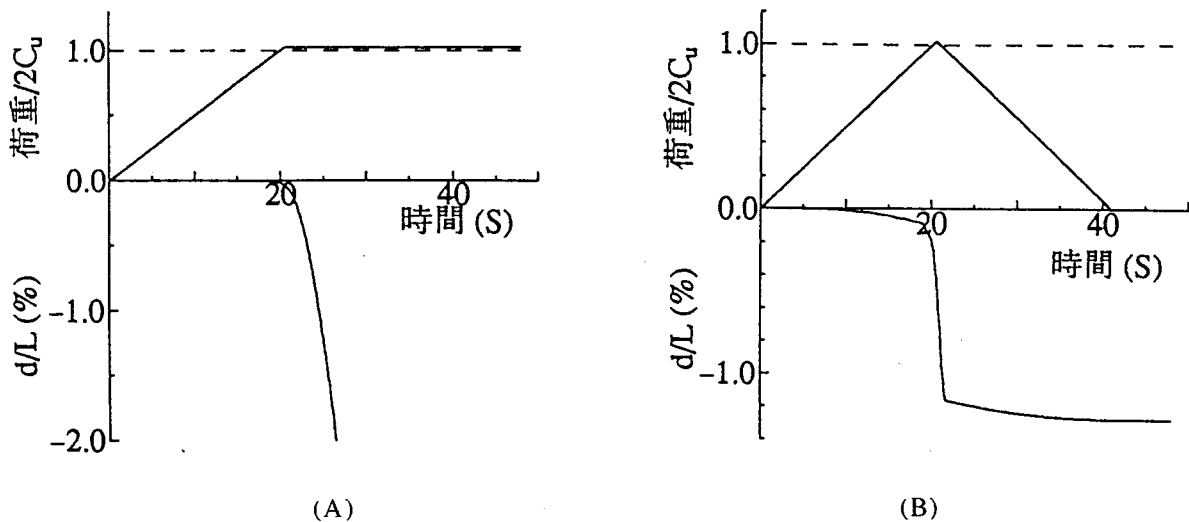


図4 荷重履歴と変形挙動

形が生じているものの、全体としては剛体運動～塑性変形～剛体運動の挙動が合理的に表現されている。

#### 4. 棒材の加振時挙動の解析

図1に示す有限要素に対して、側面を変位の拘束条件を加えない場合 (TypeA) と、側面で鉛直方向に変形しない制約条件を加える場合 (TypeB) の解析を行う。

##### 4.1 解析結果とその考察

図1の側面にて制約条件を与えない、TypeAの事例について、底部にて周波数  $0.5\text{Hz}$ 、振幅  $5\text{m/sec}^2$ 、継続時間  $8\text{sec}$  の正弦波による加振を行う。得られた解析結果を図5に示す。図5の(A)、(B)、(C)はそれぞれ図1のP点における底部に対する水平方向の相対加速度、相対速度および相対変位の時間挙動を示している。加振初期の入力波が小さい場合には剛体運動をするが、加速度の増加・減少に応じて対応して周期的な変形挙動を示す。第1周期に着目すると相対加速度が負から正に変る時刻に速度はピークを示して、その後速度の減少と共に速度の方向が変化する。底部での入力波は正から負へ作用方向が既に変化しているが、相対速度が以然として負のために、ひずみ速度によって定まる応力と加振による慣性力との間には大きな相違が生じている。そのために相対加速度は力のつり合いを保つように、瞬間的に大きく発生している。その後、相対速度が負から正に転じると、ひずみ速度によって定まる応力と加振による慣性力との間の相違が急速に小さくなって、相対加速度が激減する。加振時刻の終了と共に底部での加速度入力ゼロになってもなお、物体内にはひずみ速度に対応する応力が生じていることから、この応力につらう慣性力が生じて、相対速度を消散させるように相対加速度が発生している。最終的に相対速度はゼロになって、剛性運動に戻る。

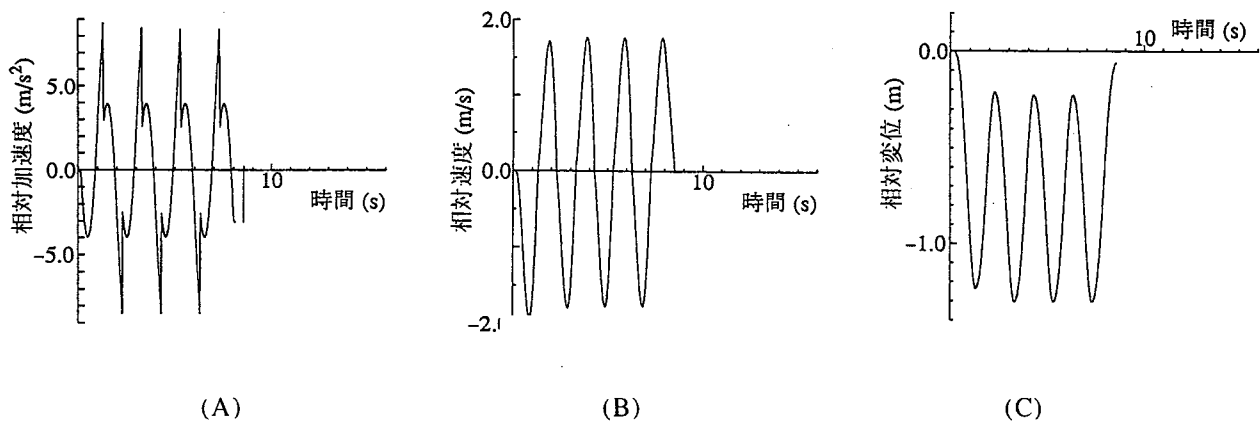


図5 加振による構造物の挙動 (Type A, 図1のP点)

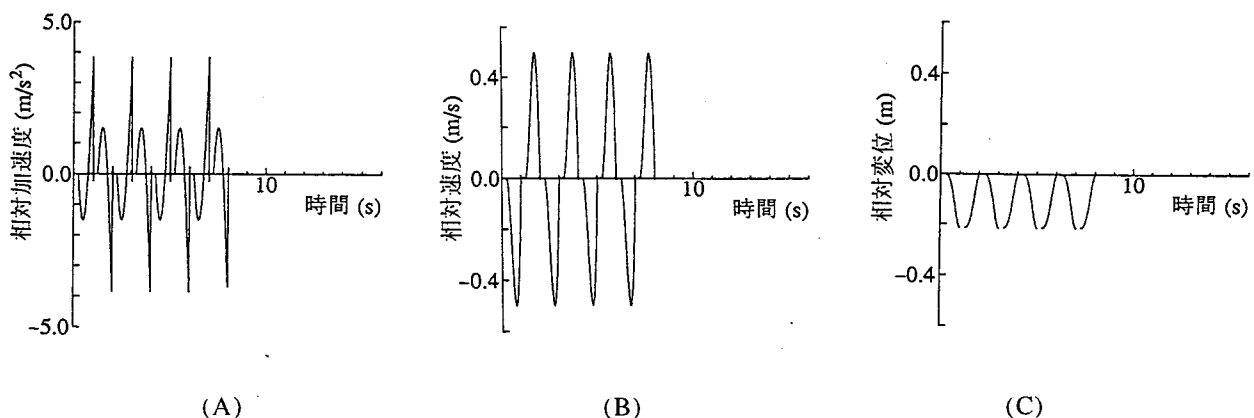


図6 加振による構造物の挙動 (Type B, 図1のP点)

## 4.2 境界条件の影響

次にTypeBについての解析結果を図6に示す。TypeAの解析結果と比較すると、相対加速度、相対速度および相対変位の発生量はいずれも小さく、境界条件による挙動の差異が顕著に現れている。相対加速度はTypeAと随分異なる挙動を示すが、基本的な挙動はTypeAと同様に説明することができる。相対加速度は第1周期目を除くと正、負のピーク相対速度が同程度の大きさであるために残留変形はあまり蓄積されない。

## 5. 振動時の幾何学的変化の及ぼす残留変形への影響

### 5.1 問題の所在と近似的解法

動的問題における幾何学的変形の影響はひずみの非線形を単に無視しているということだけでなく、慣性力を変形した構造物形状に作用させずに初期の形状に作用させる問題がある。この問題は特に弾塑性的性質を有する構造物の場合に、より顕著である。その理由は形状変化が問題になるほどの大変形は通常、塑性流動が起きる際に生じることが多いことと、幾何形状の変化に伴う載荷重の変化によって新たな塑性流動が仮されることによる。

本論文ではこの効果を取り入れた解析を行うために、各時刻ステップにおいて解析結果に基づく変形から座標を更新して近似的に幾何形状の変化を取り入れた解析を実施する。剛塑性構成式は応力・ひずみ速度関係に基づくことから、対象とする時刻における構造物形状や載荷形式だけが問題であって変形後の形状等の適合性などについて考える必要がない。この近似解析については浅岡ら（1995）によって平面ひずみ試験のシミュレーション結果が有限変形解析の解に対して精度の高い近似解を与えることが報告されている。

### 5.2 数値解析による幾何学的変化の効果の検討

図1の平面ひずみ有限要素メッシュを底部にて加振する場合の変形挙動について、形状変化の考慮による検討を加える。側面では変形の制約条件を加えずに加振するものとする。表2に解析の条件を示した。

表2 解析条件

Type	座標更新の有無	自重考慮の有無	地盤強度	最大入力加速度
Type A	*	*	10.0kN/m <sup>2</sup>	5.0m/sec <sup>2</sup>
Type C	○	*	10.0kN/m <sup>2</sup>	5.0m/sec <sup>2</sup>
Type D	*	○	50.0kN/m <sup>2</sup>	13.0m/sec <sup>2</sup>
Type E	○	○	50.0kN/m <sup>2</sup>	13.0m/sec <sup>2</sup>

図7にTypeAの加振2秒後の変形および残留変形を示す。2秒後の変形形状では上部が剛体運動を行い変形に専ら下部に集中している。左端部では圧縮モード、右端部では伸張モードが発現されている。図の相対加速度、相対速度、相対変位については既に図5に示している。TypeC（図8）はTypeAの事例に対して座標更新を考慮した事例である。TypeAでは残留変形が生じるものの破壊には至らないのに対して、TypeCでは加振開始後4.8秒で図8のような大変形となって崩壊している。変形図からは一貫して構造物上部が剛体として挙動して、変形が下部に集中していることが分かる。図9は図1のP点での水平方向の相対加速度、相対速度、相対変位図である。幾何学的変形の影響を考慮することによって図5とは随分と異なった挙動が観測される。図では変形が一方方向に周期を繰り返しながらも蓄積して、最終的な崩壊に至っている。

次に構造物の自重を考慮した場合の解析結果を示す。TypeDは座標更新を行わない場合の解析である。図10はその際の変形図であるが、加振による構造物の左右方向の振動によって底部がせん断され、自重の効果によって底部が圧縮されている様子が分かる。図11は図1のP点における水平方向の相対加速度、相対速度、相対変位の挙動を表すが、最終的に水平方向の残留変形は殆ど蓄積されていない。TypeEの解析は座標更新

によって幾何学的形状変化の影響を考慮した解析である。図12は加振による変形を表すが、自重を考慮しない場合のType C (図8) に較べて基礎底部において自重の作用によって圧縮破壊が生じていることが分かる。図13は相対加速度, 相対速度, 相対変位の時刻歴を表すが, 1周期目で破壊したために相対変位が単調増加して破壊に至っている。

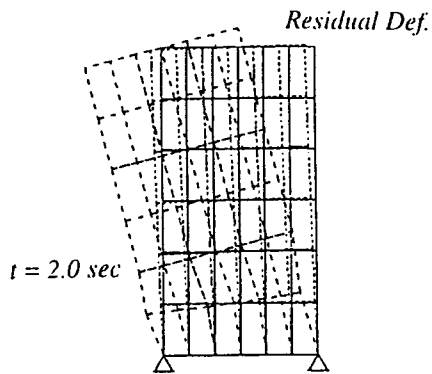


図7 Type A の変形図

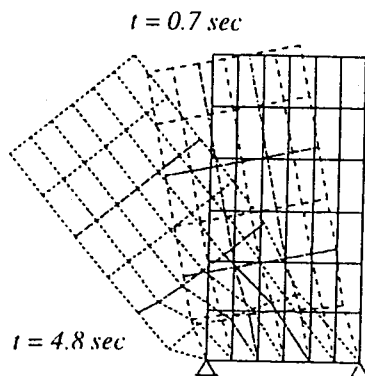


図8 Type C の変形図

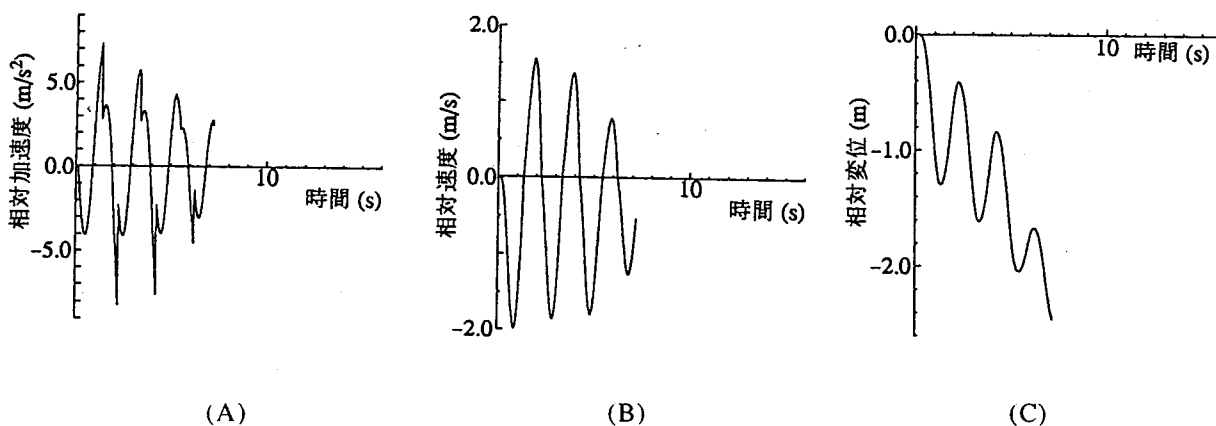


図9 加振による構造物の挙動 (Type C, 図1のP点)

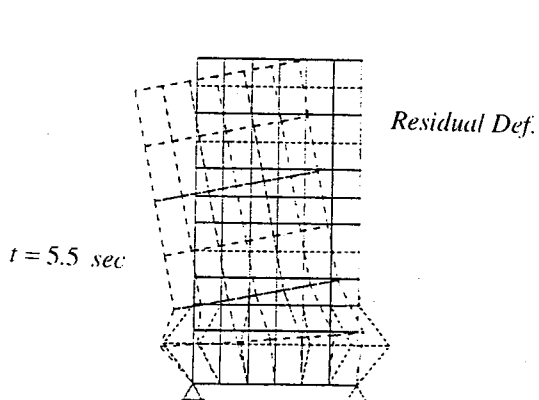


図10 Type D の変形図

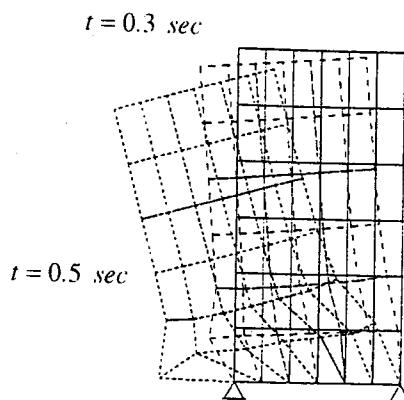


図12 Type E の変形図

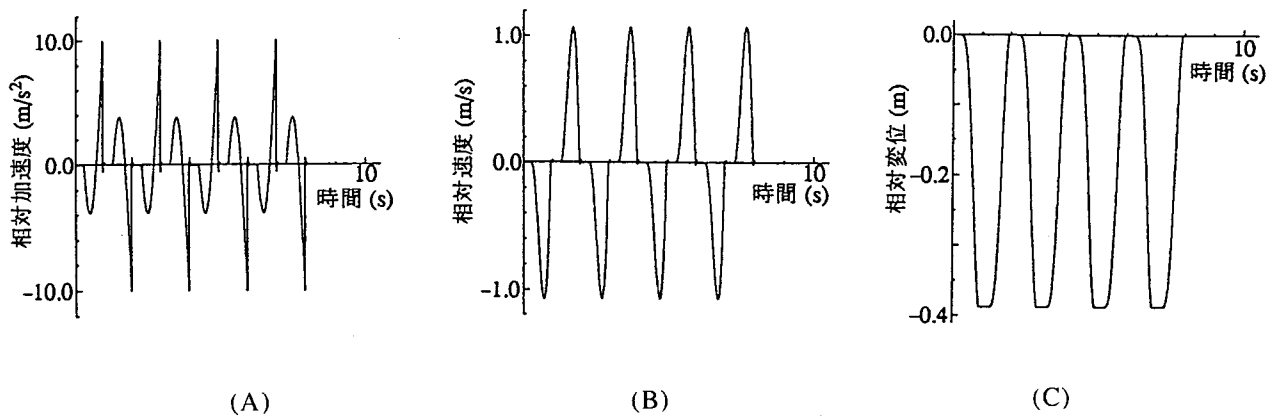


図11 加振による構造物の挙動 (Type D, 図1のP点)

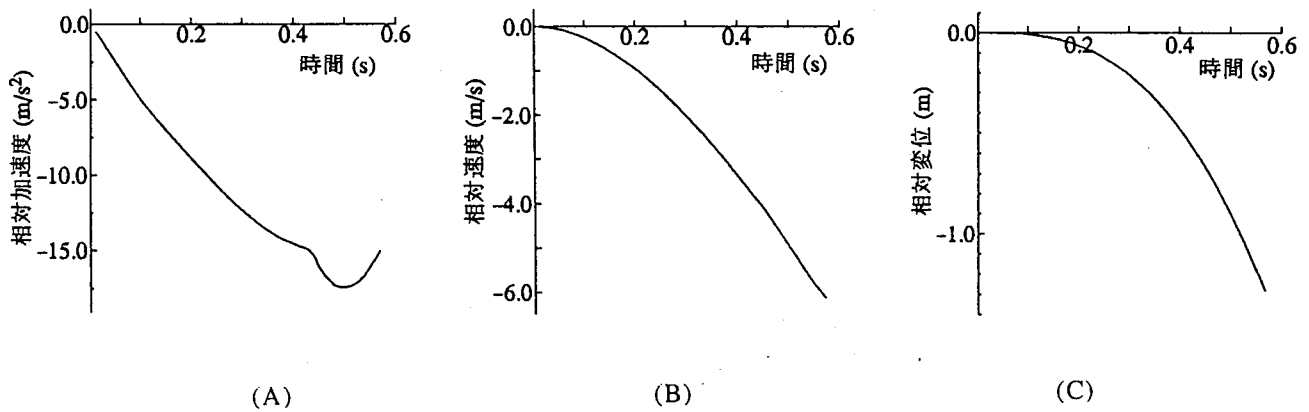


図13 加振による構造物の挙動 (Type E, 図1のP点)

## 6. 結論

本論文では地震などの振動による構造物の残留変形を剛塑性構成式に基づいて解析を行った。以下に得られた知見について箇条書きにする。

- 1) 剛塑性構成式によって構造物の剛体運動並びに塑性変形挙動を十分に表すことができることを数値解析を用いて示した。
- 2) 振動による構造物の変形は下部に集中し、上部はほぼ剛体運動をする結果となった。
- 3) 各時刻ステップにおいて座標更新を行う近似解法によって振動時の幾何学的形状変化を取り入れた解析を行った。その結果、限られた数値解析ではあるが残留変形は一般に著しく増加する傾向が得られた。
- 4) 自重を考慮する場合と考慮しない場合について残留変形を比較すると、自重を考慮した場合には構造物端部において圧縮破壊が生じるために、より構造物は破壊しやすくなることが分かった。

## 参考文献

1. Asaoka, A and Noda, T.(1995):"Imperfection-sensitive bifurcation of Cam clay under plane strain compression with undrained boundaries," Soils and Foundations, Vol.35, No.2, pp.77-91.
2. Tamura, T.(1990):"Rigid-plastic Finite Element Method in Geotechnical Engineering," Current Japanese Materials Research, Vol.7, Elsevier Applied Science, pp.135-164.