

## 1. はじめに

R C杭、P C杭、鋼管杭などの群杭が構造物の基礎として打設された地盤について、「そのような地盤をどのようにモデル化すればよいのか」といった問題に遭遇することがしばしばある。例えば、計画している構造物の地震時の挙動をあらかじめ推定するために、数値解析に際して地盤全体をモデル化する必要があるといったような場合がそれにあたる。

これは、「3次元的な杭の配置を考慮したような地盤の平均物性値をどう考えるのが確からしいか」という問題で、支持力を考える群杭の設計とは全く別個のもので、モデルの世界での問題であり、杭の設計支持力の問題に比べれば現実性、重要度は低い問題ではある。しかし、事前検討の段階で簡易な2次元平面ひずみ解析を行わねばならないような場面で、技術者を悩ませている問題のひとつではある。

このような「複雑な構造を内部に有する媒体の平均物性を求める問題」に対して合理的な答えを与えてくれる一つの方法にHomogenization (均質化) 法がある。ここでいうHomogenization法は、微分方程式論におけるSingular perturbation法に基礎を置く方法であり、周期構造を持つ材料を等価な均質体にモデル化する際の厳密な平均物性値を求めることができるというものである。

本論文は、実際に遭遇すると思われる地盤と群杭の組み合わせについて、このHomogenization法により平均弾性定数を計算して図にまとめ、実務において参考となるような資料を提供することを目的とするものである。

なお、Homogenization法と呼ばれている方法には、ここでいう方法とは全く別の、マイクロメカニクスにおける「Equivalent inclusion method」に基づいた方法があるが、弾性体からなる周期構造を持つ材料の平均物性値については同じ解を与えることが知られている。

## 2. Homogenization 法の概要

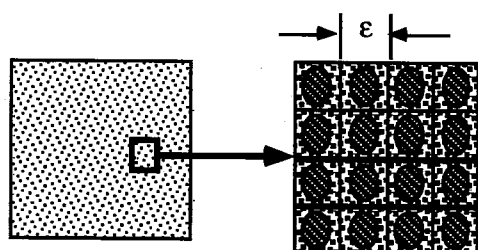


図1 微視的周期構造を有する材料

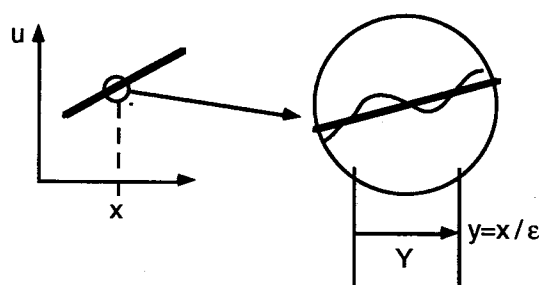


図2 微視的周期性を持つ関数の2変数表示

図1に示すような微視的周期構造を有する材料を考える。いま、微視的構造単位のスケールを $\epsilon$ とし、材料中において空間的に急激に変化する弾性係数を $E_{ijkl}^{\epsilon}(\mathbf{x})$ 、物体力を $f_i^{\epsilon}(\mathbf{x})$ 、それらの変化を反映して実現するであろう変位を $u_k^{\epsilon}(\mathbf{x})$ と表すことにすれば、この材料に対する静的つり合いの問題は一般に次の様に表される。

On the elastic constants in modelling of the ground reinforced by the piles

Takashi KYOYA, Nagoya University

Kenichi MORITA, Pacific Consultant Co. Ltd.

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} t_i v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall v_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

(1) 式は、 $E_{ijkl}^{\varepsilon}$  が正定値であるとき 1 階導関数までが連続な解  $u_k^{\varepsilon}(\mathbf{x})$  が一意に存在することが保証されている。微視的スケール  $\varepsilon$  で変化する関数を扱うために、ここで新しく  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  なる変数を導入して弾性係数、物体力および変位を次の様に 2 変数関数として表現する。

$$E_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = E_{ijkl}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = f_i\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad u_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = u_i\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2)$$

これらの関数は  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  の各成分に関して基本的には 1 を周期とする関数になる。このことを関数は  $\mathbf{y}$  に関して 1-periodic あるいはもっと一般的に Y-periodic であるという。 $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  は微視的スケール変数、 $\mathbf{x}$  は巨視的スケール変数と呼ばれる。このような関数の 2 変数表示の気分を図にすれば図 2 の様である。また、これら 2 変数表示された関数の微分は

$$\frac{\partial u_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} \quad (3)$$

となる。

以上のような準備のもとに (1) の境界値問題の解として

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (4)$$

のような漸近展開形の解を捜すことを考える。ここで  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、 $\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dots$  は微視的周期構造の影響を表す  $\mathbf{y}$  に関して Y-periodic な関数である。また、 $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  は微視的変数  $\mathbf{y}$  に依存しない関数で  $\varepsilon \rightarrow 0$  の時、すなわち微視構造が限りなく小さくなる時の極限であり、微視構造を有する材料の平均挙動を表す。(3) 式に従うと変位の微分は

$$\frac{\partial u_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^1}{\partial y_j} \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^2}{\partial y_j} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

となる。変位の導関数においては変位そのものとは異なり、 $\varepsilon \rightarrow 0$  とした極限においても微視的周期構造の影響を表す  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  の導関数が残る。すなわち、ひずみや応力については平均挙動といえども微視的構造の影響を無視できないことを示唆している。微視構造を有する材料についてこの認識は重要である。

任意関数  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  についても (4) 式と同様の漸近展開を行ない、(2) および (5) 式を用いて (1) 式を書き換え、さらに極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  を取ると次の 2 つの式を得る。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{x} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v_i^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7)$$

上の積分の極限はそれぞれ次のように書き換えられる[2]。

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl}(x, y) \frac{\partial u_k^1(x, y)}{\partial y_l} \frac{\partial v_i^1(x, y)}{\partial y_j} dy \right) dx = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial E_{ijkl}(x, y)}{\partial y_j} v_i^1(x, y) dy \right) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} dx \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl}(x, y) \left( \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1(x, y)}{\partial y_l} \right) dy \right] \frac{\partial v_i^0(x)}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i(x, y) dy \right) v_i^0(x) dx + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0(x) dx \quad (9)$$

ここに、 $Y$ は周期構造の基本単位（ユニットセル）を表し、 $|Y|$ はその体積を表す。

(8) 式中のユニットセルに関する積分の項を抜き出して等値した式：

$$\int_Y E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(x, y)}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = \int_Y \left( -\frac{\partial E_{ijkl}(x, y)}{\partial y_j} \right) v_i dy = \int_Y E_{ijkl}(x, y) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \quad (10)$$

は $Y$ -periodic なベクトル関数  $\chi_p^{kl}(x, y)$  を解に持つことが保証される[1,2]。したがって、指標 $(k, l)$ の6通りの組み合わせに応じて6つのベクトル関数が定まることになる（ $\chi_p^{kl}(x, y)$ は $(k, l)$ について対称である）。

この6つのベクトル関数 $\chi_p^{kl}(x, y)$ を用いると、(8)式を満足する $u_k^1(x, y)$ の一般解が

$$u^1(x, y) = -\chi^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \tilde{u}^1(x), \quad u_i^1(x, y) = -\chi_i^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \tilde{u}_i^1(x) \quad (11)$$

で与えられることは容易に確かめられる。ここに $\tilde{u}^1(x)$ は任意関数である。

(11)式から明らかなように $\chi_p^{kl}(x, y)$ はユニットセルに巨視的な一定の単位ひずみを与えた時に生じる変位の微視的な乱れを表す。 $\chi_p^{kl}(x, y)$ はユニットセルのcharacteristic deformation と呼ばれる。

$u_k^1(x, y)$ の一般解(11)式を(9)式に代入すると次式を得る。

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H(x) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0(x)}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f_i^H(x) v_i^0(x) dx + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0(x) dx \quad (12)$$

ここに

$$E_{ijkl}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( E_{ijkl}(x, y) - E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(x, y)}{\partial y_q} \right) dy, \quad f_i^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i(x, y) dy \quad (13)$$

すなわち、微視構造を有する材料の平均弾性係数および平均物体力を(13)式のように定めれば、元と同じ境界値問題（つりあい式）は平均挙動 $u^0(x)$ を解として与える。この $E_{ijkl}^H$ をHomogenized elastic coefficient（均質化弾性係数）、 $f_i^H$ をHomogenized body force（均質化物体力）という。

以上のことを整理すると、結局、Homogenization法により、均質化弾性係数は次のような手順で求められることになる。

- 1) 周期構造の基本単位（ユニットセル）を抜き出す。
- 2) ユニットセルに対して式(10)を解いてCharacteristic deformationを求める。
- 3) 式(13)により均質化弾性係数マトリックスおよび均質化体積力が求まる。

こうして求められた均質化弾性マトリックスと体積力を、与えられているつりあい式に用いて解けば平均挙動 $u^0(x)$ が得られる。

また、必要があれば得られた $u^0(x)$ を用いて、次式により任意のユニットセル内の局所的応力およびひずみを近似的に求めることができる。

$$e_{ij}^0 = \left\{ \left( \delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{\partial \chi_i^{pq}}{\partial y_j} \right) \frac{\partial u_p^0}{\partial x_q} \right\}_{\text{sym. part}}, \quad \sigma_{ij}^0 = E_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}^0 = \left( E_{ijkl}^\varepsilon - E_{ijpq}^\varepsilon \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (14)$$

### 3. 群杭が打設された地盤の均質化弾性定数の算定

図3に示すように杭が打設された地盤があるとき、それは全体として異方的性質を有していることは容易に想像できる。ここでは、Homogenization法によって、前章でみたような平均挙動（変位、ひずみ、応力）を与えるという意味においてこうした地盤に等価な均質異方性体の弾性係数マトリックスを計算し、参照しやすい図表として表す。

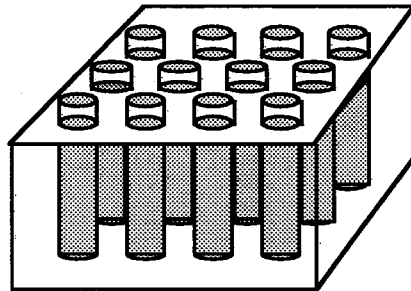


図3 杭が打設された地盤（概念図）

表1 杭と地盤の物性値

	RC杭 (径40cm)	鋼管杭 (径60cm, 肉厚1.5cm)	地盤 (4種類を想定)	
ヤング率(kgf/cm <sup>2</sup> )	2.0 x 10 <sup>5</sup>	2.0 x 10 <sup>6</sup>	300, 500, 1000, 2,000	
ポアソン比	0.17	0.17	0.42	0.35

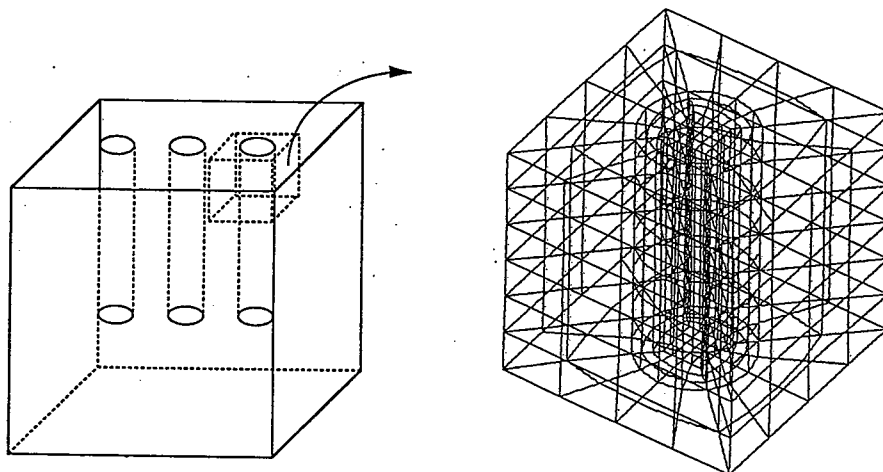


図4 杭が打設された地盤のユニットセルとその3次元有限要素モデル

ものを用い、各層の中間に5または6本(幅90cmあたり)を水平に設置した。アクリル製法面保護パネルは3mm厚と5mm厚の2種類である。パネルと鉄筋とは剛結したが、パネル間は図16のように設置し左右のパネルは互いに噛み合わせ(図16上)、上下は接触するだけとした。計測項目は、補強材ひずみ、法面水平変位そして載荷位置での荷重と鉛直変位である。また、載荷終了後に土槽側面を取りはずし、斜面内部のすべり形状を記録した。

表2 実験の条件

Type	勾配	実験条件
A	5	無補強
B	分	鉄筋1(長さ50cm)のみ
C	勾	鉄筋1+パネル(3mm厚)
D	配	鉄筋1+パネル(5mm厚)
E		無補強
F	2	鉄筋1(長さ50cm)のみ
G	分	鉄筋1+パネル(3mm厚)
H	勾	鉄筋1+パネル(5mm厚)
I	配	鉄筋2(長さ70cm)のみ
J		鉄筋2+パネル(5mm厚)

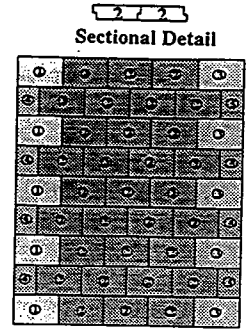


図16 法面保護パネル

### 3.4 5分勾配の模型斜面における実験結果

(1)実験観察記録・Type A(図17)：まず斜面上部にクラックが入り、破壊荷重174kPaに達した時には斜面下部に大きなクラックが発生した。破壊時のすべり面は図17に示す。Type B(図18)：Type aと同様に載荷重170kPa前後で斜面上部とそれに続くように斜面中央部に水平にクラックが発生した。載荷重220kPa前後で斜面中央部ではらみ出すと伴にクラック部からの砂のこぼれ出しが顕著になり、260kPaで上部が大きく肌落ちした。載荷重283kPaで斜面先に大きなクラックが入り崩壊した。すべり線は3本観測された。Type C(図19)：載荷重170kPa前後でパネルの噛み合わせが外れだし、パネルの大部分は土圧により外側に大きくしなっていた。その後、大きな変化はなく267kPaで破壊した。すべり線は深いものが1本で基礎底面に達していた。Type D(図20)：全てのパネルは噛み合ったままで、荷重350kPaの破壊時まで斜面形状の変化は見られなかった。すべり

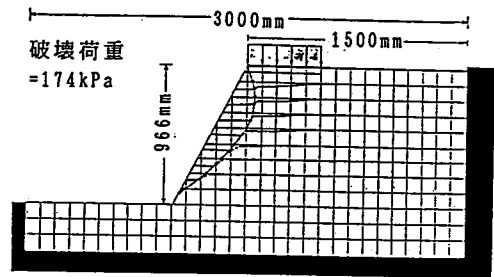


図17 Type A(無補強)の破壊後の様子

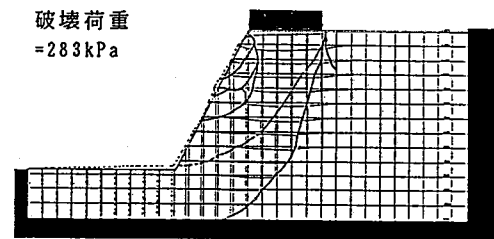
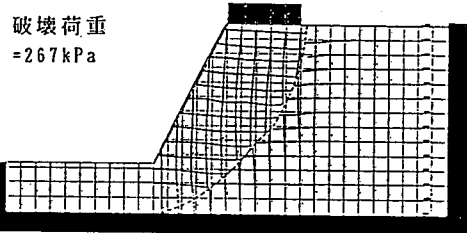


図18 Type B(鉄筋のみ)の破壊後の様子

線はType Cと同様に深いが奥行は小さい。



### (2) 荷重～変位関係

図21に荷重～鉛直変位関係を示す。破壊荷重はType D>B>C>A

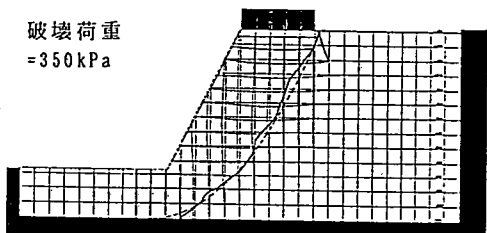


図20 Type D(パネル5mm厚)の破壊後の様子

図19 Type C(パネル3mm厚)の破壊後の様子  
の順である。また載荷重の増加勾配も同様の順であり変形の拘束という点から見てもType Dが最も優れている。

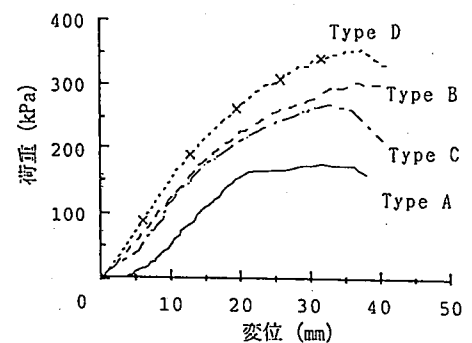


図21 荷重～鉛直変位関係(5分勾配)

(3)法面水平変位と補強材軸ひずみ・・・図22は破壊荷重時の補強材軸ひずみ分布と法面水平変位を示す。Type C, Dでは補強材とパネルの結合部に大きな引張力が働いており、その傾向はパネルが厚いType Dの方が大きい。すなわち、パネルの剛性の増加に伴い補強材の軸力も大きくなっている。Type Dでは軸力の増加に合わせて、斜面の安定性も増加しているが、特にType Dでは斜面下段の奥側の軸力が大きい。法面水平変位は、Type Aの場合には補強材やパネルによる拘束がないために、斜面全体が大きく膨れだした。Type Bの場合には荷重の増加に伴い、補強材だけでは拘束し切れず斜面中央部がはらみ出している。Type C, Type Dの場合はいずれも、破壊時に補強領域全体が剛体

のように一体化し、載荷板から斜面底部に向かって下部のみが大きく前に膨らみ出す。

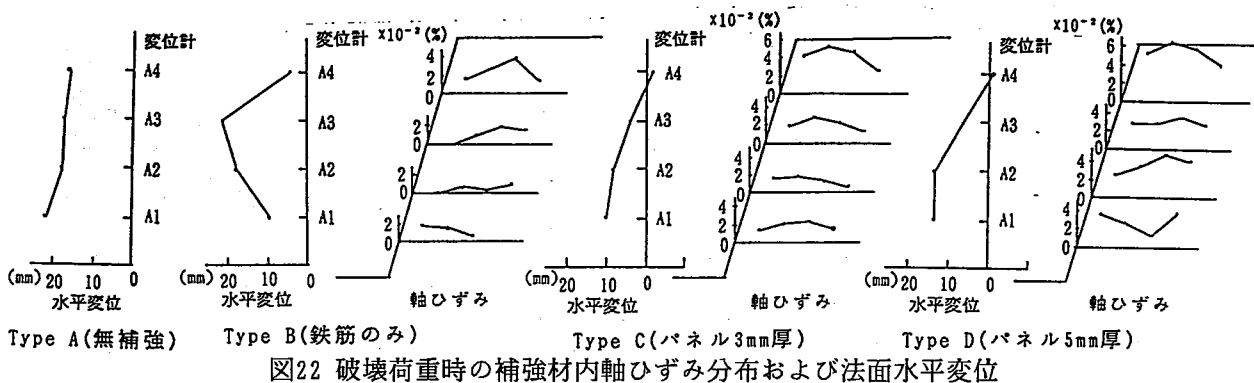


図22 破壊荷重時の補強材内軸ひずみ分布および法面水平変位

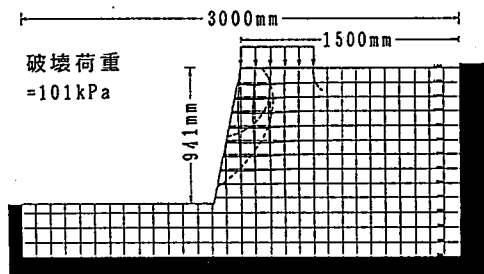


図23 Type E(無補強)の破壊後の様子

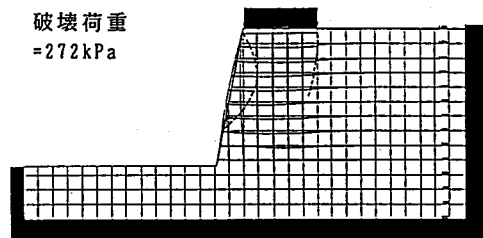


図24 Type F(鉄筋のみ)の破壊後の様子

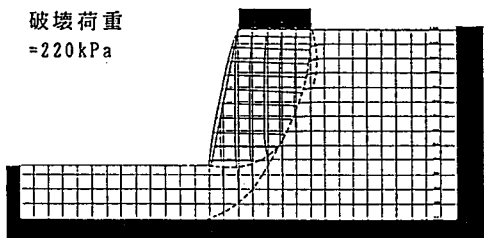


図25 Type G(パネル3mm厚)の破壊後の様子

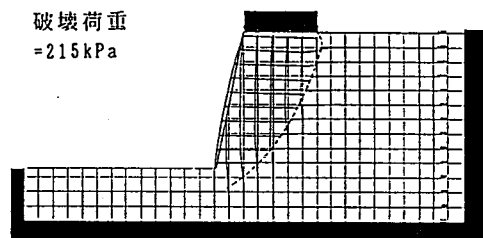


図26 Type H(パネル5mm厚)の破壊後の様子

### 3.5 2分勾配の模型斜面における実験結果

図23～26にType E～Hにおける斜面の破壊の状態を示す。補強方法によるすべり面形状の傾向は5分勾配の実験とほぼ同様である。Type E(無補強)では斜面下部の崩壊が顕著であり、Type F(鉄筋のみ)では斜面上部の浅いすべり面のみの破壊であった。Type G, H(パネル有)は深いすべり面が1本のみ現れるが、Type C, Dと同様にパネルの厚い方がすべり面の形状は小さい。図27に荷重～鉛直変位関係を示す。Type Fは斜面下部の崩壊によって5分勾配のType Aの約1/2の荷重で破壊に至るが、鉄筋を挿入したType GはType Bとほぼ同じの破壊荷重(270kPa)にまで達する。Type GとHはいずれも220kPaあまりで破壊に至り、パネルを使用することにより破壊荷重が小さくなる傾向は5分勾配の実験と同様である。補強材長70cmの場合、パネル無しのType Iは50cmのType Fとほぼ等しい破壊荷重であり、パネルがある場合は430kPaもの荷重を發揮した。この時パネルのほとんどが土圧に耐えれず破断してしまった。図28は破壊荷重時の補強材軸ひずみ分布および法面水平変位である。傾向は5分勾配の実験とほとんど同じであるが、軸ひずみの分布にパネル3mmと5mmとの差が5分勾配の時ほど見られなくなる。また、水平変位量はパネルの剛性によって押さえることができる。

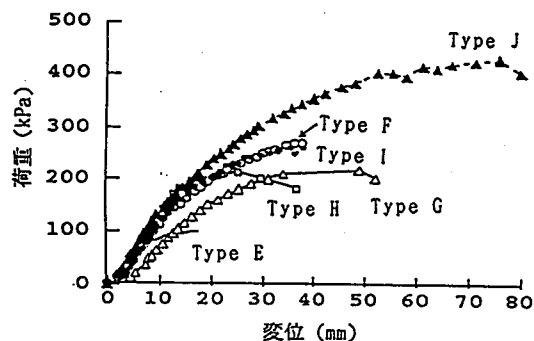


図27 荷重～変位関係(2分勾配)

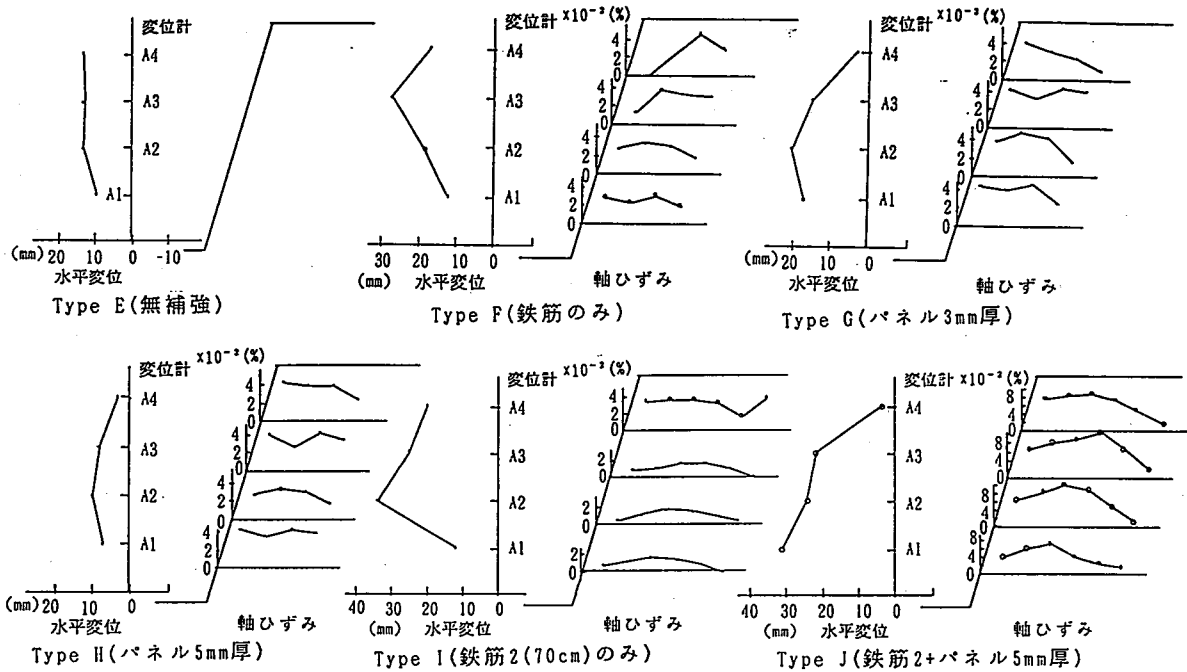


図28 破壊荷重時の補強材内軸ひずみ分布および法面水平変位(2分勾配)

### 3.6 実験の考察

補強材は、無補強時と同様の浅いすべり面での致命的な崩壊を押さえる効果があり、さらに法面保護パネルはその浅いすべり面をもなくす効果がある。Type C, G, Hはパネルを有しているために軸力分布はType B, Fよりも大きい、破壊荷重では下回る。パネルの有無により明らかに壊れ方が異なり、パネル有りの補強領域を一体化する効果がむしろ破壊荷重を下げる結果にもなることを示している。この場合には、軸力分布の増加がそのまま破壊荷重の増加に直接関係するとは言い難い。破壊荷重が顕著に増加したType Dでは補強材軸力が斜面下部の奥側で大きく発生しており、鉄筋があたかもアンカーのように地盤内で働いていたことを示しており、パネルの剛性の増加につれてすべり面が小さくなることと関連している。Type Jでは全てのパネルが破損したが、パネルの剛性がより高ければ破壊荷重はさらに大きくなっていったと考えられる。また、法面保護工は補強材長が荷重奥行に対して大きい場合に、一層有効に作用することが分る。

### 3.7 まとめ

斜面の勾配、補強材長そしてパネルの剛性はそれぞれ密接に相互作用を及ぼしあうと考えられ、いずれか1つの条件のみを取り出して補強効果についての議論をすることはできない。法面保護パネルを併用した鉄筋補強斜面の安定に関する模型実験はすでに多数行われているはずのもので、今後これら既往の実験結果との比較も含め考察を深めて行く必要がある。

## 4. 実験のシミュレーション

本章では、3章の実験の中でも5分勾配の実験のType A, B, C, Dに対するシミュレーションの結果を示す。

### 4.1 シミュレーションの結果

**Type A(図29):** 図に示す有限要素メッシュを用いて解析した。荷重板の底面が剛でかつ粗の条件で支持力を算定した。Type Aの解析は土質定数を逆算するのに用い、 $c=20\text{kPa}$ 、 $\phi=26^\circ$ の場合に破壊荷重は173kPaとなり、最もよく実験結果(174kPa)を説明することが分った。塑性流れ場は斜面上部で発生しており、実験とよく一致した。

**Type B(図30):** 図中の太線の節点間に、長さ不変の制約条件を導入した。破壊荷重は290kPaとなり、実験結果(300kPa)をかなり正確に説明できる。塑性域は、荷重端部から斜面先に広がり、実験の水平変位をよく表現している。

**Type C(図31)**：パネルには大きな剛性がないとして、斜面上の節点の速度場のみを拘束する条件で解析を行った。破壊荷重は290kPa(実験278kPa)となり、Type Bの解析結果と全く同じとなり、実験と同様に壁面工の効果は、破壊荷重の解析値に影響しない。

**Type D(図32)**：パネルに大きな剛性があると考え、図の有限要素メッシュで解析した。図中には破壊時塑性流れも示す。破壊荷重は302kPaと求められ、実験値(360kPa)で得られた、剛性の高いパネルの効果の大きさは正確には説明できなかった。

図33, 34はそれぞれType B, Cについて、メッシュを細かくして計算したものであるが、極限荷重、流れ場ともに粗いメッシュの場合と傾向は変らなかった。

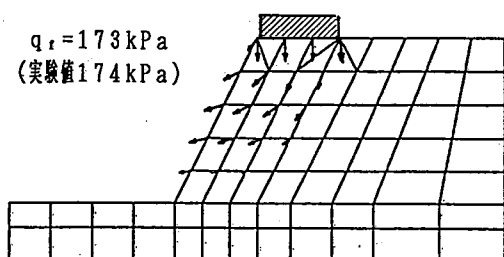


図29 Type A

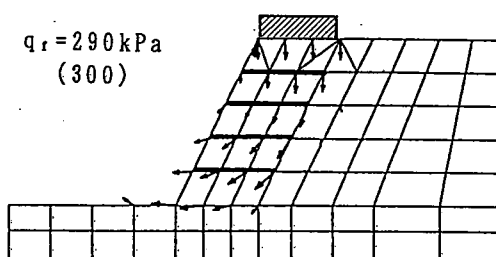


図30 Type B

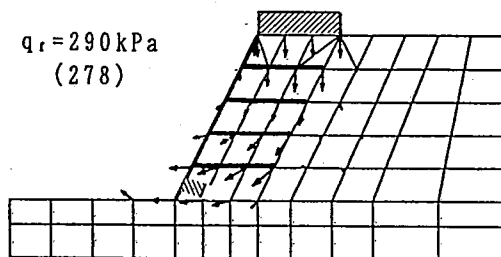


図31 Type C

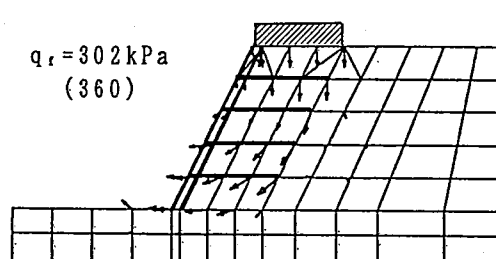


図32 Type D

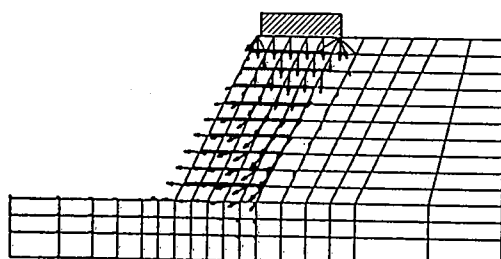


図33 Type B

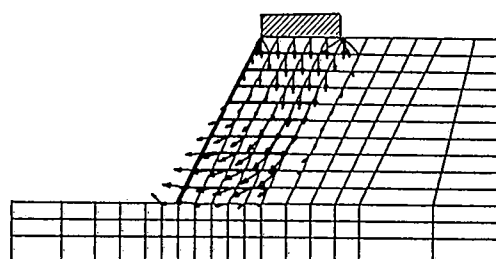


図34 Type C

#### 4.2 まとめ

本解析では、鉄筋挿入により破壊荷重が約1.7倍にもなる実験結果(Type A, B参照)を高精度で説明できることを示すことができた。また、剛性の小さいパネルが、上載荷重に対しては効果が期待できないという実験結果についても、シミュレーションにおいても同様の結果となった。

#### 5. おわりに

本論で得られた知見を示す。①補強材力は内力として与えられるべきものであり、その考えに基づいた解析を行うことによって、従来実験や経験によってのみ示されていた補強材力の分布形を求めることができた。②補強土模型実験において、補強効果は補強材長や法面保護材の剛性のみで決まるものではなく、それらとともに地盤の境界条件、荷重条件など総合的な見地にたってはじめて評価し得るものであることが分った。③模型実験の破壊荷重のシミュレーションは実験値をほぼ説明することができたが、法面工の効果や、補強材力分布の算出にあたってはまだ若干の改良が必要である。

**参考文献** 1)Asaoka & Kodaka(1992):Bearing capacity of foundations of clays by the rigid plastic finite element model, Proc. of NUMOG IV, SWANSEA, UK, pp.839-849.



## 1. はじめに

RC杭、PC杭、鋼管杭などの群杭が構造物の基礎として打設された地盤について、「そのような地盤をどのようにモデル化すればよいのか」といった問題に遭遇することがしばしばある。例えば、計画している構造物の地震時の挙動をあらかじめ推定するために、数値解析に際して地盤全体をモデル化する必要があるといったような場合がそれにあたる。

これは、「3次元的な杭の配置を考慮したような地盤の平均物性値をどう考えるのが確からしいか」という問題で、支持力を考える群杭の設計とは全く別個のもので、モデルの世界での問題であり、杭の設計支持力の問題に比べれば現実性、重要度は低い問題ではある。しかし、事前検討の段階で簡易な2次元平面ひずみ解析を行わねばならないような場面で、技術者を悩ませている問題のひとつではあろう。

このような「複雑な構造を内部に有する媒体の平均物性を求める問題」に対して合理的な答えを与えてくれる一つの方法にHomogenization (均質化) 法がある。ここでいうHomogenization法は、微分方程式論におけるSingular perturbation法に基礎を置く方法であり、周期構造を持つ材料を等価な均質体にモデル化する際の厳密な平均物性値を求めることができるというものである。

本論文は、実際に遭遇すると思われる地盤と群杭の組み合わせについて、このHomogenization法により平均弾性定数を計算して図にまとめ、実務において参考となるような資料を提供することを目的とするものである。

なお、Homogenization法と呼ばれている方法には、ここでいう方法とは全く別の、マイクロメカニクスにおける「Equivalent inclusion method」に基づいた方法があるが、弾性体からなる周期構造を持つ材料の平均物性値については同じ解を与えることが知られている。

## 2. Homogenization 法の概要

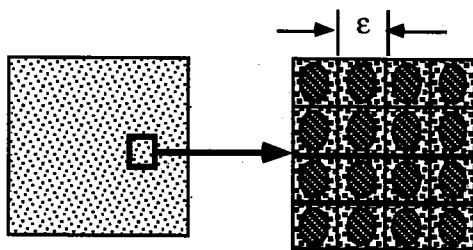


図1 微視的周期構造を有する材料

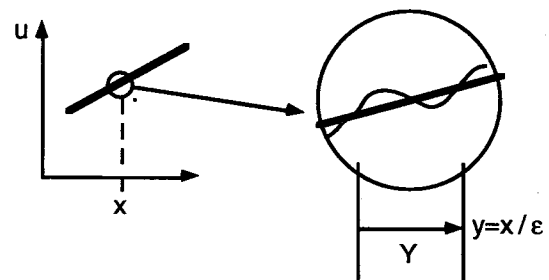


図2 微視的周期性を持つ関数の2変数表示

図1に示すような微視的周期構造を有する材料を考える。いま、微視的構造単位のスケールを $\varepsilon$ とし、材料中において空間的に急激に変化する弾性係数を $E_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 、物体力を $f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 、それらの変化を反映して実現するであろう変位を $u_k^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ と表すことにすれば、この材料に対する静的つり合いの問題は一般に次の様に表される。

On the elastic constants in modelling of the ground reinforced by the piles

Takashi KYOYA, Nagoya University

Kenichi MORITA, Pacific Consultant Co. Ltd.

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} t_i v_i(\mathbf{x}) dx + \int_{\Omega} f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) dx \quad \nabla v_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

(1) 式は、 $E_{ijkl}^{\varepsilon}$  が正定値であるとき 1 階導関数までが連続な解  $u_k^{\varepsilon}(\mathbf{x})$  が一意に存在することが保証されている。

微視的スケール  $\varepsilon$  で変化する関数を扱うために、ここで新しく  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  なる変数を導入して弾性係数、物体力および変位を次の様に 2 変数関数として表現する。

$$E_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = E_{ijkl}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad f_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = f_i\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad u_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = u_i\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2)$$

これらの関数は  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  の各成分に関して基本的には 1 を周期とする関数になる。このことを関数は  $\mathbf{y}$  に関して 1-periodic あるいはもっと一般的に Y-periodic であるという。 $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  は微視的スケール変数、 $\mathbf{x}$  は巨視的スケール変数と呼ばれる。このような関数の 2 変数表示の気分を図にすれば図 2 の様である。また、これら 2 変数表示された関数の微分は

$$\frac{\partial u_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} \quad (3)$$

となる。

以上のような準備のもとに (1) の境界値問題の解として

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u^0(\mathbf{x}) + \varepsilon u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (4)$$

のような漸近展開形の解を捜すことを考える。ここで  $u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、 $u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ... は微視的周期構造の影響を表す  $\mathbf{y}$  に関して Y-periodic な関数である。また、 $u^0(\mathbf{x})$  は微視的変数  $\mathbf{y}$  に依存しない関数で  $\varepsilon \rightarrow 0$  の時、すなわち微視構造が限りなく小さくなる時の極限であり、微視構造を有する材料の平均挙動を表す。(3) 式に従うと変位の微分は

$$\frac{\partial u_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^1}{\partial y_j} \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^2}{\partial y_j} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

となる。変位の導関数においては変位そのものとは異なり、 $\varepsilon \rightarrow 0$  とした極限においても微視的周期構造の影響を表す  $u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  の導関数が残る。すなわち、ひずみや応力については平均挙動といえども微視的構造の影響を無視できないことを示唆している。微視構造を有する材料についてこの認識は重要である。

任意関数  $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  についても (4) 式と同様の漸近展開を行ない、(2) および (5) 式を用いて (1) 式を書き換え、さらに極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  を取ると次の 2 つの式を得る。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} dx = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v_i^0(\mathbf{x}) dx + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0(\mathbf{x}) dx \quad (7)$$

上の積分の極限はそれぞれ次のように書き換えられる [2]。

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl}(x, y) \frac{\partial u_k^1(x, y)}{\partial y_l} \frac{\partial v_i^1(x, y)}{\partial y_j} dy \right) dx = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial E_{ijkl}(x, y)}{\partial y_j} v_i^1(x, y) dy \right) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} dx \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl}(x, y) \left( \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1(x, y)}{\partial y_l} \right) dy \right] \frac{\partial v_i^0(x)}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i(x, y) dy \right) v_i^0(x) dx + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0(x) dx \quad (9)$$

ここに、 $Y$ は周期構造の基本単位（ユニットセル）を表し、 $|Y|$ はその体積を表す。

(8) 式中のユニットセルに関する積分の項を抜き出して等値した式：

$$\int_Y E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(x, y)}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = \int_Y \left( -\frac{\partial E_{ijkl}(x, y)}{\partial y_j} \right) v_i dy = \int_Y E_{ijkl}(x, y) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \quad (10)$$

は $Y$ -periodic なベクトル関数  $\chi_p^{kl}(x, y)$  を解に持つことが保証される[1,2]。したがって、指標  $(k, l)$  の6通りの組み合わせに応じて6つのベクトル関数が定まることになる（ $\chi_p^{kl}(x, y)$  は  $(k, l)$  について対称である）。

この6つのベクトル関数  $\chi_p^{kl}(x, y)$  を用いると、(8) 式を満足する  $u_k^1(x, y)$  の一般解が

$$u^1(x, y) = -\chi^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \tilde{u}^1(x), \quad u_i^1(x, y) = -\chi_i^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \tilde{u}_i^1(x) \quad (11)$$

で与えられることは容易に確かめられる。ここに  $\tilde{u}^1(x)$  は任意関数である。

(11) 式から明らかなように  $\chi_p^{kl}(x, y)$  はユニットセルに巨視的な一定の単位ひずみを与えた時に生じる変位の微視的な乱れを表す。 $\chi_p^{kl}(x, y)$  はユニットセルの characteristic deformation と呼ばれる。

$u_k^1(x, y)$  の一般解 (11) 式を (9) 式に代入すると次式を得る。

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H(x) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0(x)}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f_i^H(x) v_i^0(x) dx + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0(x) dx \quad (12)$$

ここに

$$E_{ijkl}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( E_{ijkl}(x, y) - E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(x, y)}{\partial y_q} \right) dy, \quad f_i^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i(x, y) dy \quad (13)$$

すなわち、微視構造を有する材料の平均弾性係数および平均物体力を (13) 式のように定めれば、元と同じ境界値問題（つりあい式）は平均挙動  $u^0(x)$  を解として与える。この  $E_{ijkl}^H$  を Homogenized elastic coefficient（均質化弾性係数）、 $f_i^H$  を Homogenized body force（均質化物体力）という。

以上のことを整理すると、結局、Homogenization 法により、均質化弾性係数は次のような手順で求められることになる。

- 1) 周期構造の基本単位（ユニットセル）を抜き出す。
- 2) ユニットセルに対して式 (10) を解いて Characteristic deformation を求める。
- 3) 式 (13) により均質化弾性係数マトリックスおよび均質化体積力が求まる。

こうして求められた均質化弾性マトリックスと体積力を、与えられているつりあい式に用いて解けば平均挙動  $u^0(x)$  が得られる。

また、必要があれば得られた  $u^0(x)$  を用いて、次式により任意のユニットセル内の局所的応力およびひずみを近似的に求めることができる。

$$e_{ij}^0 = \left\{ \left( \delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{\partial \chi_i^{pq}}{\partial y_j} \right) \frac{\partial u_p^0}{\partial x_q} \right\}_{\text{sym. part}}, \quad \sigma_{ij}^0 = E_{ijkl}^E e_{kl}^0 = \left( E_{ijkl}^E - E_{ijpq}^E \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (14)$$

### 3. 群杭が打設された地盤の均質化弾性定数の算定

図3に示すように杭が打設された地盤があるとき、それは全体として異方的性質を有していることは容易に想像できる。ここでは、Homogenization法によって、前章でみたような平均挙動（変位、ひずみ、応力）を与えるという意味においてこうした地盤に等価な均質異方性体の弾性係数マトリックスを計算し、参照しやすい図表として表す。

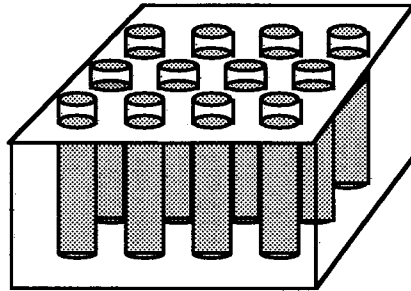


図3 杭が打設された地盤（概念図）

表1 杭と地盤の物性値

	RC杭 (径40cm)	鋼管杭 (径60cm, 肉厚1.5cm)	地盤 (4種類を想定)	
ヤング率(kgf/cm <sup>2</sup> )	2.0 x 10 <sup>5</sup>	2.0 x 10 <sup>6</sup>	300, 500, 1000, 2,000	
ポアソン比	0.17	0.17	0.42	0.35

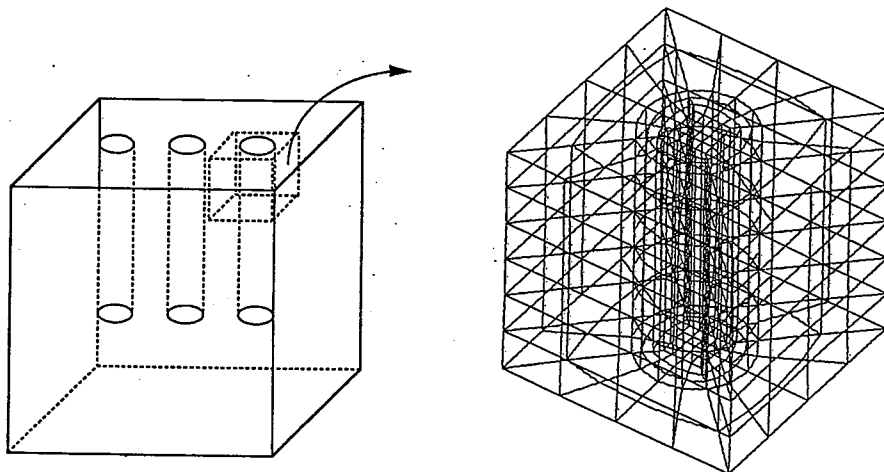


図4 杭が打設された地盤のユニットセルとその3次元有限要素モデル

表1に示すような、実際に杭が用いられている地盤の物性値の分布（ヤング率が $300\text{kgf/cm}^2$ から $2000\text{kgf/cm}^2$ 、ポアソン比が $0.35$ から $0.42$ ）の中から、代表的な4種類の地盤モデルを選び、RC杭と鋼管杭をそれぞれ打設した場合について、Homogenization解析を行ない、それら杭をも含めた地盤全体の平均弾性係数を計算する。杭の打設ピッチについては、実際の施工で行なわれている杭径の3倍から5倍とした。

図4に、杭が打ち込まれた地盤の周期構造の単位となるユニットセルの3次元有限要素モデルを示す。この有限要素モデルの地盤と杭それぞれの部分にそのヤング率とポアソン比を入力して2章で述べた手順1)から3)に従えば均質化弾性係数マトリックスが得られる。

Homogenization解析の結果、群杭が打設された地盤は直交異方性体として均質化され、そのコンプライアンスマトリックスは次式に示すような形となる。ここに、 $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$ は、図5に示すような座標軸を地盤に対して設定したときのそれぞれの座標軸方向の弾性係数、 $G_{yz}$ 、 $G_{zx}$ 、 $G_{xy}$ は座標面内におけるせん断弾性係数、 $\nu_{xy}$ 、 $\nu_{yz}$ 、 $\nu_{zx}$ は座標面内におけるポアソン比をそれぞれ表している。

解析の結果得られたこれらの均質化弾性係数を、RC杭の場合を図6に、鋼管杭の場合を図7にそれぞれ示す。また、表2および表3には代表的な打設ピッチについてそれらの値を示す。なお、PC杭については、その弾性定数がRC杭とほぼ同じであることから、RC杭とほぼ同じ結果を得たので以下では省略している。

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

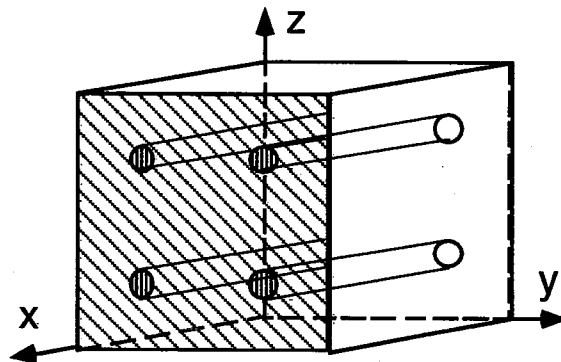


図5 杭が打設された地盤に設定した座標軸

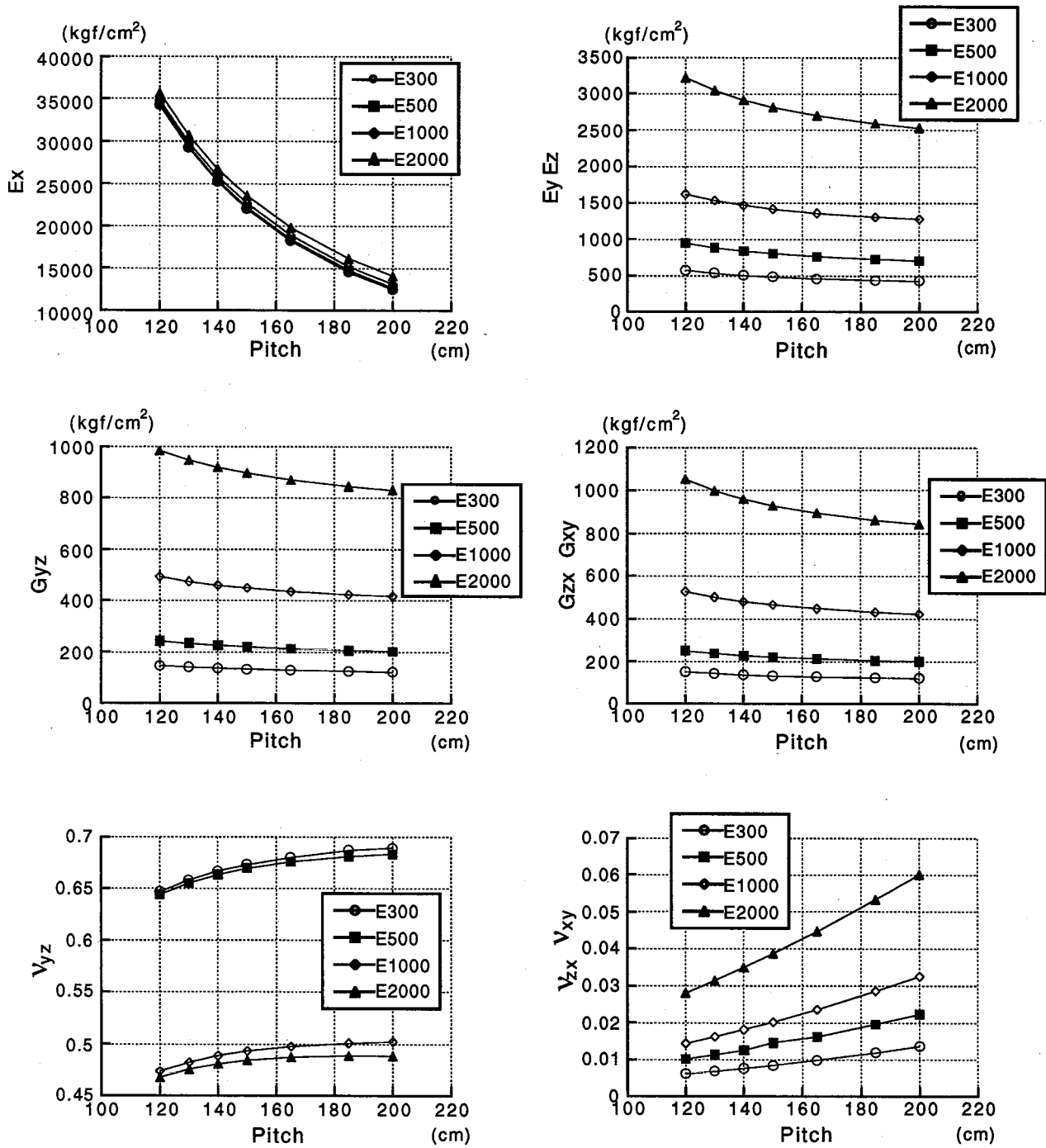


図6 RC杭の打設ピッチと均質化弾性係数の変化

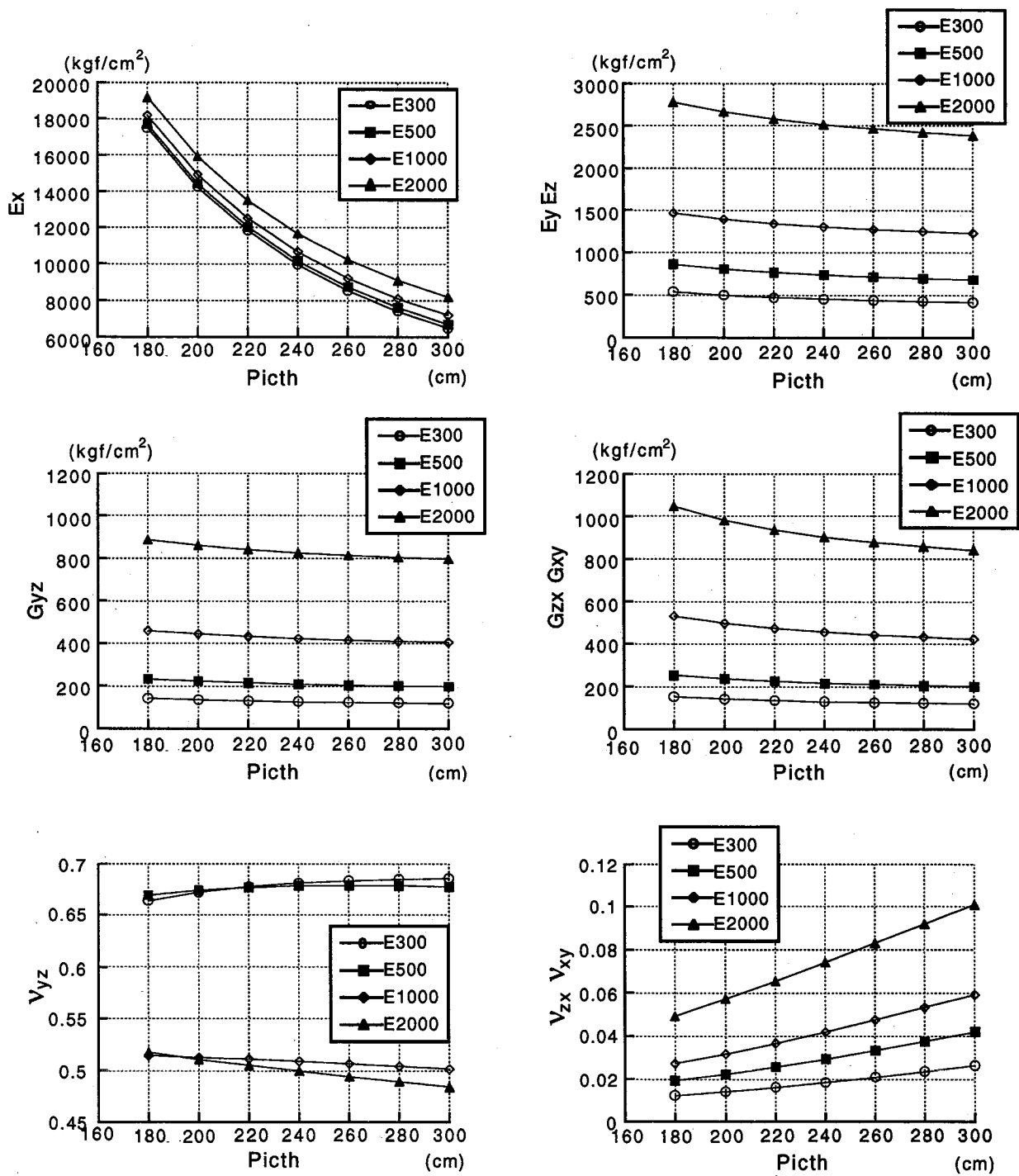


図7 鋼管杭の打設ピッチと均質化弾性係数の変化

表2 RC杭を打設した地盤の均質化弾性係数

Rock Mass E(kgf/cm <sup>2</sup> ) V	Bolt pitch (cm)	Ex (kgf/cm <sup>2</sup> )	Ey Ez (kgf/cm <sup>2</sup> )	Gyz (kgf/cm <sup>2</sup> )	Gzx Gxy (kgf/cm <sup>2</sup> )	VyxVzx	Vzy
E=300 V=0.42	120	34265	572.65	146.72	150.77	0.0061970	0.64664
	150	22037	485.38	132.59	132.94	0.0085407	0.67293
	200	12528	427.84	121.74	120.61	0.013704	0.68914
E=500 V=0.42	120	34433	951.82	244.39	251.13	0.01025	0.64425
	150	22218	806.57	220.88	221.48	0.014708	0.66939
	200	12717	710.20	202.84	200.96	0.022411	0.68325
E=1000 V=0.35	120	34842	1623.7	492.75	527.40	0.014502	0.47364
	150	22663	1418.9	448.97	465.42	0.020310	0.49310
	200	13186	1280.6	416.11	422.49	0.032536	0.50229
E=2000 V=0.35	120	35685	3220.8	983.33	1051.4	0.028101	0.46770
	150	23560	2813.7	896.54	928.89	0.038752	0.48431
	200	14128	2533.6	831.36	843.94	0.060088	0.48839

表3 鋼管杭を打設した地盤の均質化弾性係数

Rock Mass E(kgf/cm <sup>2</sup> ) V	Bolt pitch (cm)	Ex (kgf/cm <sup>2</sup> )	Ey Ez (kgf/cm <sup>2</sup> )	Gyz (kgf/cm <sup>2</sup> )	GzxGxy (kgf/cm <sup>2</sup> )	VyxVzx	Vzy
E=300 V=0.42	180	17506	539.59	142.94	152.99	0.012202	0.66381
	240	9978.5	454.02	127.50	130.45	0.018474	0.68118
	300	6494.3	418.47	120.39	121.23	0.026473	0.68552
E=500 V=0.42	180	17709	864.75	233.52	254.27	0.019352	0.66929
	240	10180	739.23	209.90	217.07	0.029501	0.67851
	300	6695.5	684.95	198.97	201.83	0.042046	0.67752
E=1000 V=0.35	180	18195	1466.1	459.67	530.86	0.027339	0.51473
	240	10672	1303.6	421.90	454.68	0.041986	0.50923
	300	7190.4	1230.6	404.69	423.36	0.059196	0.50172
E=2000 V=0.35	180	19189	2781.4	887.05	1047.4	0.049258	0.51769
	240	11669	2516.7	826.21	902.30	0.074208	0.49969
	300	8188.1	2388.9	798.16	842.37	0.10098	0.48406

これらの図から、RC杭も鋼管杭も打設ピッチが細くなるにつれて、杭打設方向のヤング率Exは急激に上昇することがわかる。その値は地盤のヤング率の違いによってわずかの違いはあるが、鉄筋コンクリートの計算で用いる断面積によるヤング率の荷重平均の式

$$Ex = \frac{ApEp + AgEg}{Ap + Ag} \quad (16)$$

で与えられる平均ヤング率にほぼ等しい。ここに、Ap、Agは、それぞれ杭と地盤の断面積、Ep、Egは杭と地盤それぞれのヤング率である。したがって、杭の打設方向については(16)式によって平均均質体の軸方向(杭の打設方向)弾性係数を推定しても差しつかえないことがわかる。

打設方向に直角な方向、すなわち水平方向のヤング率Ey、Ezとせん断弾性係数Gyz、Gxy (=Gzx)はExとは異なり、地盤のヤング率が高いほど杭によるそれらの値の上昇率は大きく、また、打設ピッチが細くなるにつれての値の上昇の割合も大きいことがわかる。

図8、9に、2次元平面ひずみ問題としてこれらの地盤を解析するときのために、次式で与えられる平面ひずみ弾性マトリックスの各成分D11、D22、D33、D12を示した(D13とD23はこの場合0になる)。



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ & D_{22} & 0 \\ \text{Sym.} & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(17)

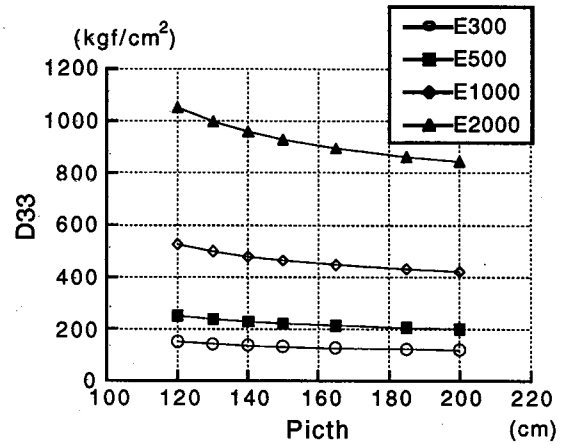
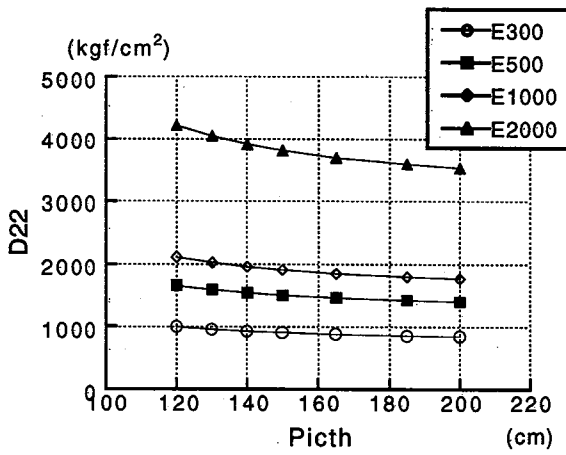
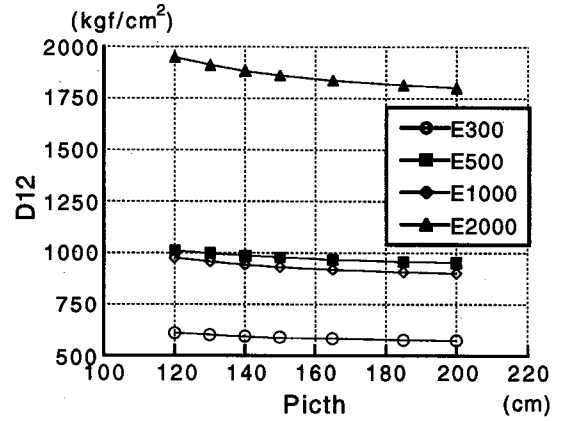
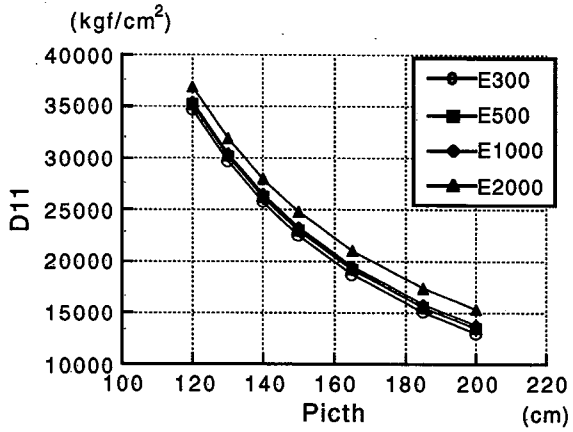


図8 RC杭を打設した地盤の2次元平面ひずみ弾性マトリックスの各成分の値

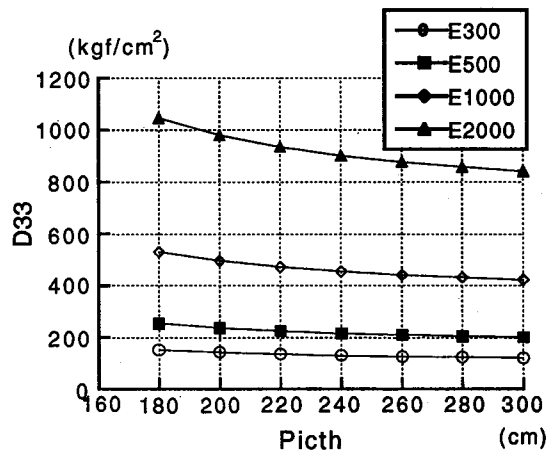
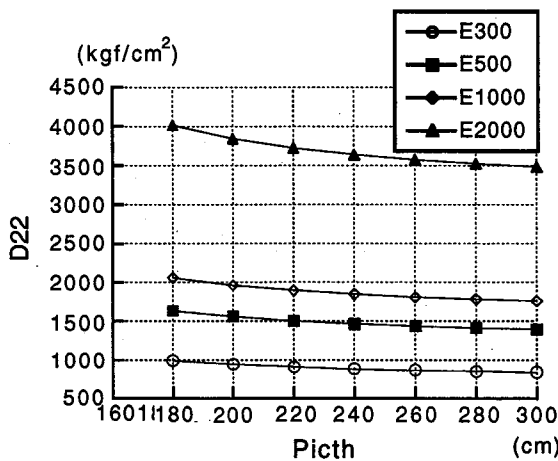
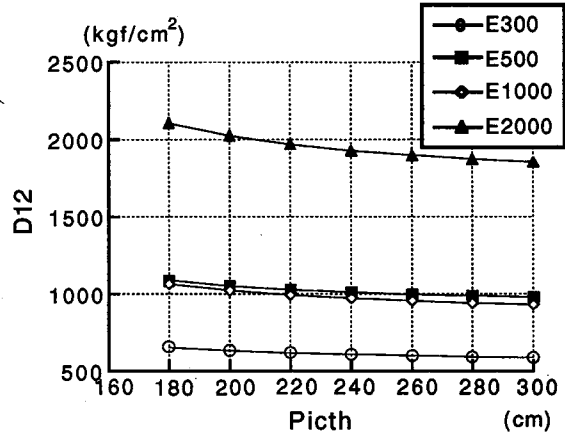
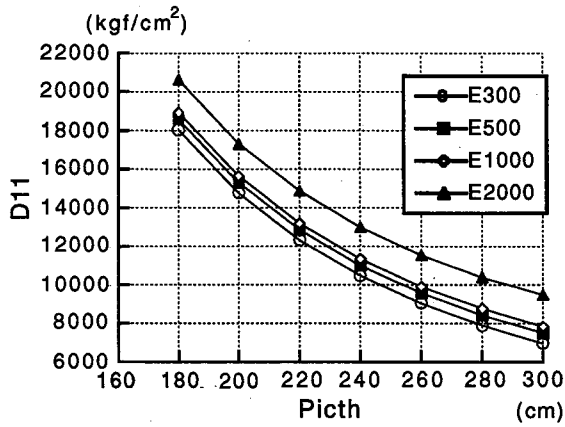


図9 鋼管杭を打設した地盤の2次元平面ひずみ弾性マトリックスの各成分の値

#### 4. おわりに

本論文では、群杭が打設された地盤を等価な均質体（異方弾性体）にモデル化した時の弾性係数マトリックスを Homogenization 法によって算定して図表にまとめた。この結果が実務において役にたつことがあれば幸いに思う。

#### 参考文献

- [1] J. L. Lions, Some Methods in the Mathematical Analyses of systems and their Control, Science Press, Beijing (1981)
- [2] J. M. Guedes and N. Kikuchi, Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 83, pp. 143-198 (1990)
- [3] 日本建築学会：建築基礎構造設計指針, pp.197-310
- [4] 社団法人 日本道路協会：道路橋示方書・同解説 I 共通編 IV下部構造編, pp. 274-331(1991).
- [5] 伊丹安夫、片山杉、後巖、原島龍一：新編土工学講座15 土木施工法、コロナ社, pp.110-256.
- [6] 社団法人 日本建設機械化協会編：場所打ちぐい施工ハンドブック、技報堂, pp.1-pp67 (1970)