

名古屋大学 正会員 浅岡 顕
 ○名古屋大学大学院 学生会員 小高猛司
 名古屋大学大学院 学生会員 野田利弘

1. はじめに

塑性加工の分野で発展してきた剛塑性有限要素法は、近年地盤工学の分野でも注目され、支持力や破壊機構の予測に利用されている。しかし、本来地盤工学で取り扱う問題は、強度が不均質な材料が主であり、均質Mises体のように簡単に解を得ることはできない。これは破壊の問題が双曲型の支配方程式で規定されることに由来するのだが、本論文ではこのような不均質材料であっても、剛塑性有限要素法を用いて高精度で支持力を求めることができる計算方法を提案する。

2章ではまず、深さ方向に強度の増加する不均質Mises体を扱い、3章においてCam clayおよび関口・太田モデルで記述される深さ方向に強度の増加する飽和した正規粘土地盤を対象に土-水連成解析を行う。

2. 深さ方向に強度が増加するMises体の剛塑性有限要素解析

2.1 Mises材料

本解析で取り扱うMises材料の降伏関数を次式で表す。

$$f = \frac{1}{2}(s_{ij}s_{ij} - \sigma_0^2) \quad (1)$$

ここに、 s_{ij} は偏差応力、 σ_0 はミーゼス定数である。式(1)を法線則に適用し次式を得る。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda s_{ij} \quad (2)$$

ここに、 $\lambda = \dot{\epsilon} / \sigma_0$ 、 $\dot{\epsilon} = (\epsilon_{ij}^p \cdot \epsilon_{ij}^p)^{1/2}$ 。

結局式(2)よりMises材料の構成式は、

$$s_{ij} = \frac{\sigma_0}{\dot{\epsilon}} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3)$$

となり、同時に非圧縮条件式(4)が従うことになる。

$$\dot{\epsilon}_v^p = 0 \quad (4)$$

また、内部消散率は次式で与えられる。

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) = \sigma_0 \cdot \dot{\epsilon} \quad (5)$$

2.2 極限つり合い式

Druckerの仮説に基づき、塑性学における上界定理から極限つり合い式を導く。なお、以下の議論では次に示す有限要素離散化した記号を用いる。

- $\dot{\epsilon}^p$: 各要素の塑性ひずみ速度ベクトル
- s : 各要素の偏差応力ベクトル
- \dot{u} : 全体節点変位速度ベクトル
- F : 全体節点力ベクトル
- \dot{v} : 各要素の塑性体積ひずみ速度ベクトル

Soil Profile Construction and Mesh Generation for the Rigid Plastic Finite Element Computation of Clays: Akira ASAOKA, Takeshi KODAKA and Toshihiro NODA (Nagoya Univ.)

$B : \dot{\epsilon}^p = B\dot{u}$ で定義されるマトリックス

$L : \dot{v} = L\dot{u}$ で定義されるマトリックス

構成式(3)では塑性ひずみ速度の方向は規定できても、その大きさは不定である。そのため、極限つり合い解析を行うには、不定な速度場の大きさをあらかじめ決めておく制約条件が別途必要となる。この制約条件の選び方により次の2つの問題を考えることができる。

【問題A】作用する外力系の大きさが未知な場合

外力系によってなされる塑性仕事率の大きさを仮に1とする条件を加えることによって、上界定理は以下のように書き換えられる。

$$\text{Minimize } \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dV \quad (= \int_V D(\dot{u}) dV) \quad (6)$$

$$\text{subject to } L\dot{u} = \mathbf{0} \text{ and } \mathbf{F}^T \dot{u} = 1,$$

この条件で最小化演算を行うと、式(6)は制約条件式(8), (9)を伴い、式(7)に示す μ, λ, \dot{u} についての極限つり合い式となる¹⁾。

$$\int_V B^T s dv + L^T \lambda = \mu \mathbf{F} \quad (7)$$

$$L\dot{u} = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}^T \dot{u} = 1 \quad (9)$$

結局不静定な極限つり合い式(7)に構成式(3)を代入して解を得る。式(7)の λ は各要素の不定平均応力ベクトルであり、 μ は荷重係数である。また、荷重 \mathbf{F} の形状は事前に与えておく事が必要となる。

【問題B】変位速度を事前に与える場合

ある決められた節点での変位速度を事前に与えるという条件で内部消散率を最小化すると、次の極限つり合い式になる。

$$\int_V B^T s dV + L^T \lambda = C^T \mu \quad (10)$$

式(10)は式(8)の制約条件に加えて次式の制約条件の下で解かれる。

$$C\dot{u} = \dot{u}_0 \quad (11)$$

ここで、 \dot{u}_0 は事前に与えておく変位速度である。線形な制約条件(11)の与えかたによって問題は基礎底面が Rigid-Smooth および Rigid-Rough の2つの問題を考えることができる。 \dot{u}, λ, μ に関して式(10), (7), (11)を解くが、 μ は基礎底面下での反力ベクトルである。極限荷重(支持力)はこの反力を基礎底面で積分しその平均値として得られる。

2.3 強度profileの離散化

強度 σ_0 が深さ方向に増加する場合を考える。内部消散率は次式のように置き換えられる。

$$\int_V D(\dot{u}) dV = \int_V \sigma_0(z) \cdot \bar{\epsilon} dV = \int_0^H \sigma_0(z) \cdot w(z) dz \quad (12)$$

しかし、この内部消散率 $\int_V D(\dot{u}) dV$ が有限要素離散化した後の強度profileを用いて計算されたものであっても、もとの強度profileを用いたものであっても、任意の速度場において等しくなれば、その最小化演算として得られる極限つり合い式の解は、いずれの強度profileを用いて計算しても同じとなる。従来、強度profileの離散化は元の強度profileの要素ごとでの平均値を用いることが多い(従来法と呼ぶ)が、本論文ではこれとは別の強度profileの離散化の方法を提案する。式(12)の $w(z)$ を次式の多項式で近似する。

$$w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} \quad (13)$$

図1に示すようにn層の多層系を考えれば、n個の強度が必要となる。

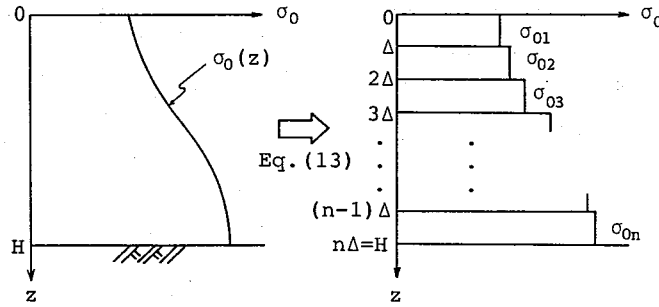


図1：等価多層系地盤

式(12)を式(11)に代入し、元の強度profileとn個の強度定数 $\sigma_{01}, \dots, \sigma_{0n}$ に離散化した強度profileの両者が等しいとすれば、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} a_0 \int_0^H \sigma_0(z) dz & -\int_0^\Delta \sigma_{01} dz & -\int_\Delta^{2\Delta} \sigma_{02} dz & \dots -\int_{(n-1)\Delta}^H \sigma_{0n} dz \\ a_1 \int_0^H \sigma_0(z) \cdot z dz & -\int_0^\Delta \sigma_{01} z dz & -\int_\Delta^{2\Delta} \sigma_{02} z dz & \dots -\int_{(n-1)\Delta}^H \sigma_{0n} z dz \\ a_2 \int_0^H \sigma_0(z) \cdot z^2 dz & -\int_0^\Delta \sigma_{01} z^2 dz & -\int_\Delta^{2\Delta} \sigma_{02} z^2 dz & \dots -\int_{(n-1)\Delta}^H \sigma_{0n} z^2 dz \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} \int_0^H \sigma_0(z) \cdot z^{n-1} dz & -\int_0^\Delta \sigma_{01} z^{n-1} dz & -\int_\Delta^{2\Delta} \sigma_{02} z^{n-1} dz & \dots -\int_{(n-1)\Delta}^H \sigma_{0n} z^{n-1} dz \end{array} \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

上式が任意の速度場（つまり、任意の a_0, \dots, a_n ）で成立するという条件から、 $\sigma_{01}, \dots, \sigma_{0n}$ についての連立方程式(14)が得られる。

$$\begin{pmatrix} \int_0^\Delta dz & \int_\Delta^{2\Delta} dz & \dots & \int_{(n-1)\Delta}^H dz \\ \int_0^\Delta z dz & \int_\Delta^{2\Delta} z dz & \dots & \int_{(n-1)\Delta}^H z dz \\ \int_0^\Delta z^2 dz & \int_\Delta^{2\Delta} z^2 dz & \dots & \int_{(n-1)\Delta}^H z^2 dz \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^\Delta z^{n-1} dz & \int_\Delta^{2\Delta} z^{n-1} dz & \dots & \int_{(n-1)\Delta}^H z^{n-1} dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{01} \\ \sigma_{02} \\ \sigma_{03} \\ \vdots \\ \sigma_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^H \sigma_0(z) dz \\ \int_0^H \sigma_0(z) \cdot z dz \\ \int_0^H \sigma_0(z) \cdot z^2 dz \\ \vdots \\ \int_0^H \sigma_0(z) \cdot z^{n-1} dz \end{pmatrix} \quad (14)$$

剛塑性有限要素解析を行うために、式(14)で決定した強度profileを持つ多層系地盤のことを本論文では“等価多層系地盤 (Equivalent Multi-layered System)”と呼ぶ²⁾。

2.4 剛体領域の削除

剛塑性解析を行うと計算出力として要素毎に相当塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ が求められるが、計算対象領域Vの取り方によっては $\dot{\epsilon}$ がほとんど0に近い要素も存在する。本論文では計算精度を上げるため、このような要素を剛体領域と見なして、V内から削除することを試みる。ただし、削除するのは深さ方向のみとし、水平方向の要素が全て剛体とみなせる場合にのみ、それ以上の深さを解析対象外として削除した。以上の様に決定した新たな領域Vについて、式(14)で強度profileを決定し直して剛塑性計算を行い、そこでまた剛体領域が存在すれば再びそこを削除して計算することを繰り返す。

2.5 計算事例

図2に示すように、深さ方向に一定の割合で強度が増加する問題を考える。図中には従来法の場合の強度profileも示す。解析は平面ひずみ条件で行ったが、その場合粘着力 c は σ_0 とは $c = \sigma_0 / \sqrt{2}$ の関係で表される。図3は解析の境界条件である。基礎はRigid-Smoothとし、2.2節の【問題B】で解析する。

図4と図5に解析結果を示す。図4中にはDavis & Booker³⁾によって求められた解析解も示したが、どの層数においても等価多層系地盤の方が、従来法の強度profileの地盤よりも解の精度がよいことがわかる。図5

は5層の地盤において、剛体領域の削除に伴って解の精度が向上する様子を示している。

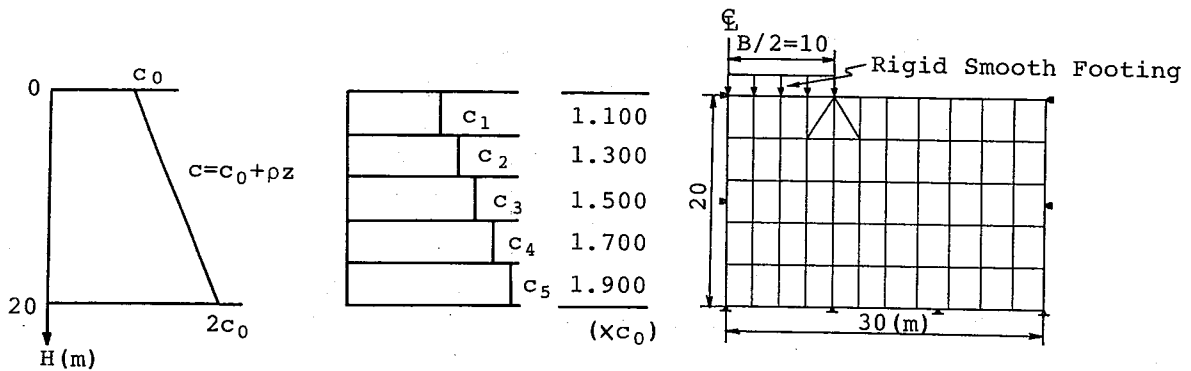


図2：強度profileと従来法による離散化

図3：有限要素メッシュ

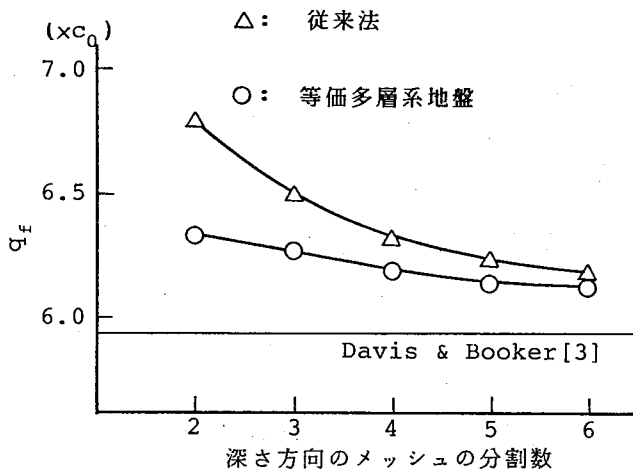


図4：極限荷重 q_f ～深さ方向のメッシュ分割数関係

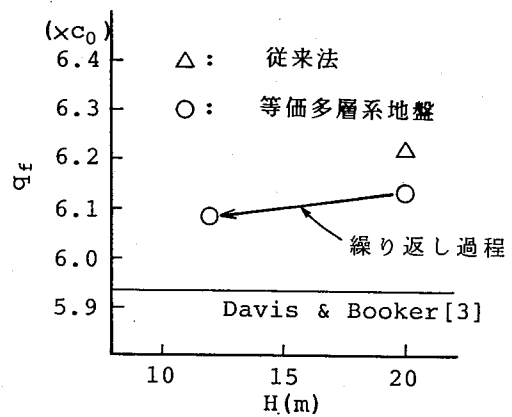


図5：極限荷重 q_f ～解析対象深さH関係

図6は剛体領域削除に伴うメッシュの切り直しの様子とその都度採用した強度profile、および破壊時塑性流れ図を示す。

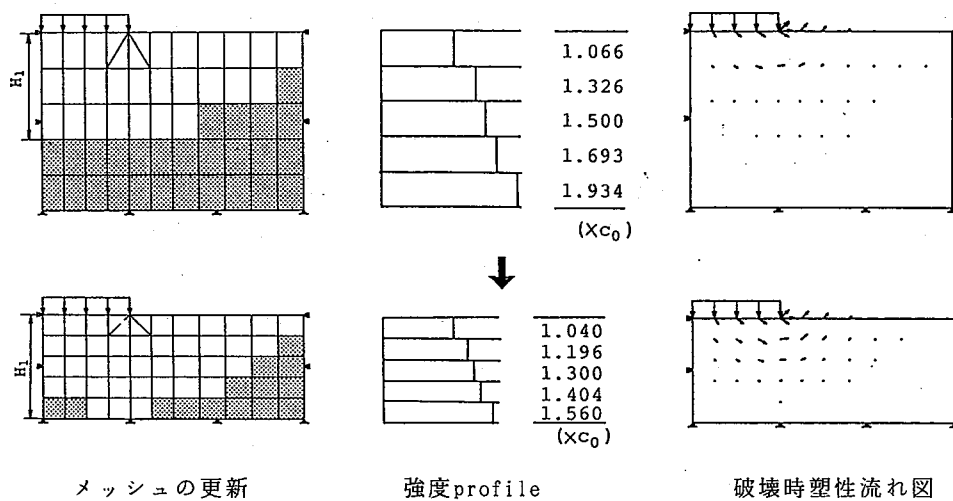


図6：強度profileの決定およびメッシュの更新

3. 正規粘土の土-水連成支持力解析

2章で行った解析を飽和した正規粘土の非排水条件での土-水連成解析⁴⁾に適用する。

3.1 Cam clayモデル⁵⁾

限界状態における構成式は

$$s_{ij} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M \cdot (p')_f}{\bar{e}} \right) \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (15)$$

となり、内部消散率は次式となる。

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}} M \cdot (p')_f \cdot \bar{e} \quad (16)$$

式(15)より、この場合も式(4)の破壊時非圧縮条件を満足する事は明らかである。式(15)、(16)と式(3)、(8)を比較することにより次式を得る。

$$(p')_f = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_0}{M} \quad (17)$$

ここに、Mおよび $(p')_f$ は限界状態パラメータおよび破壊時平均有効応力である。1つ増えた場の未知数 $(p')_f$ を決定するために、次の非排水条件式を適用する。

$$p'_f = p'_0 \exp(-\Lambda) \quad (18)$$

ここに、 $\Lambda = 1 - \kappa / \lambda$ は非可逆比であり、 p'_0 は非排水載荷前の初期平均有効応力である。この問題では鉛直有効土被り圧 σ_v が深さ方向に一定に増加するとして、これを式(14)で求めるべきsoil profileとする。

3.2 関口・太田モデル⁶⁾

自然堆積粘土の異方性を考慮するために、次式の関口・太田モデルの降伏関数を適用する。

$$\epsilon_v^p = M D \ln \frac{p'}{p'_0} + D \eta^* \quad , \quad \eta^* = \sqrt{\frac{3}{2} (\eta_{ij} - \eta_{ij0})(\eta_{ij} + \eta_{ij0})} \quad (19)$$

ここに、 $\eta_{ij} = s_{ij} / p'$ と $\eta_{ij0} = s_{ij0} / p'_0$ は現在および初期の応力比であり、 ϵ_v^p は硬化パラメータとなっている。式(18)から限界状態式は次式となる。

$$M - \frac{3}{2\eta^*} \eta_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij0}) = 0 \quad (20)$$

式(20)と法線則により限界状態における構成式は次のようになる。

$$\eta_{ij} = \eta_{ij0} + \alpha \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad , \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M}{\bar{e}} - \frac{\dot{\epsilon}_{kl}^p \cdot \eta_{kl}}{\bar{e}^2} \quad (21)$$

Cam clayモデルと同様に式(21)より式(4)の破壊時非圧縮条件を満たすことがわかる。また内部消散率もCam clayモデルと全く同様に次式となる。

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}} M \cdot (p')_f \cdot \bar{e} \quad (22)$$

破壊時平均有効応力を求めるために、非排水条件式(23)を適用する。

$$(p')_f = p'_0 \exp \left[\Lambda \left(-1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{e}_{ij}^p \cdot \eta_{ij0}}{M \cdot \bar{e}} \right) \right] \quad (23)$$

ここでもCam clay同様に深さ方向に増加する σ_v を式(14)によって決定する。

3.3 解析事例

本章では軟弱地盤上に盛土を建造するのを想定して、2章の解析事例とは異なり2.2節【問題A】の境界値問題を適用する。図7は解析に用いた一番初期のメッシュである。図8は元の鉛直有効土被り圧と従来法によるsoil profileである。表1は解析に必要な土質パラメータである。以上の全く同じの境界条件および土質定数を用いてCam clayと関口・太田モデルの両者を用いて解析を行う。

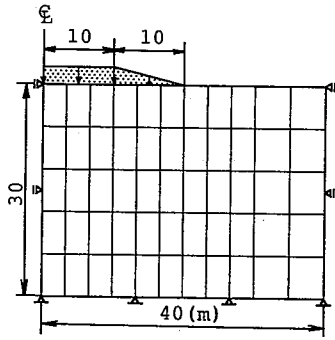


図7: 有限要素メッシュ (盛土載荷)

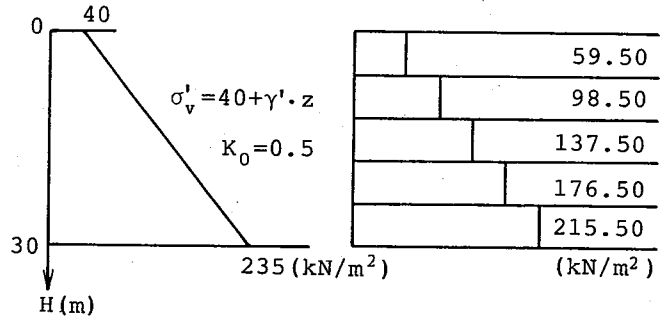


図8: soil profile

表1: 土質パラメータ

λ	0.25	K_0	0.5
κ	0.13	γ_t	16.3
M	1.2		(kN/m ³)

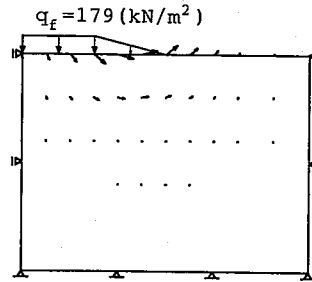


図9: Cam clay モデル

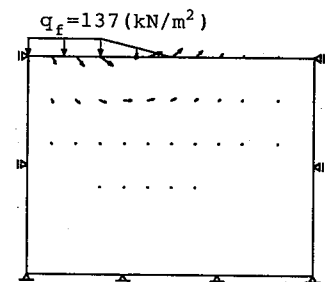


図10: 関口・太田モデル

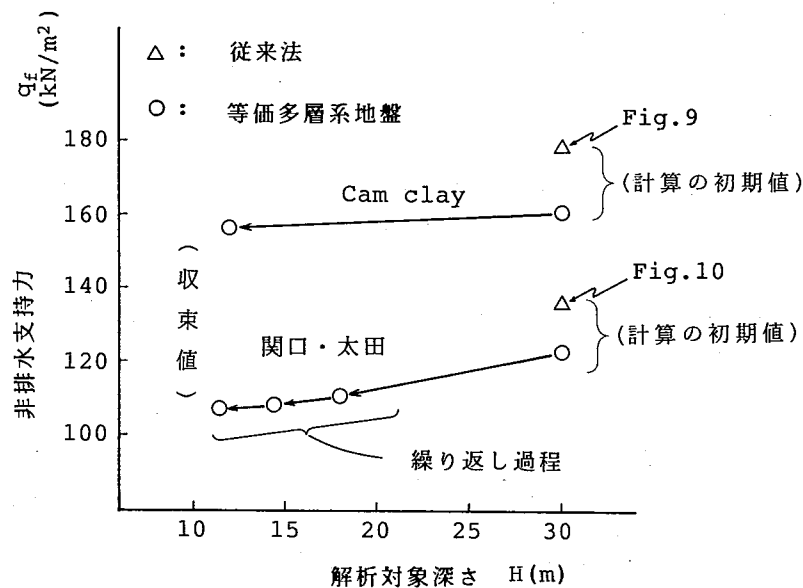


図11: 繰り返し計算手法による計算結果

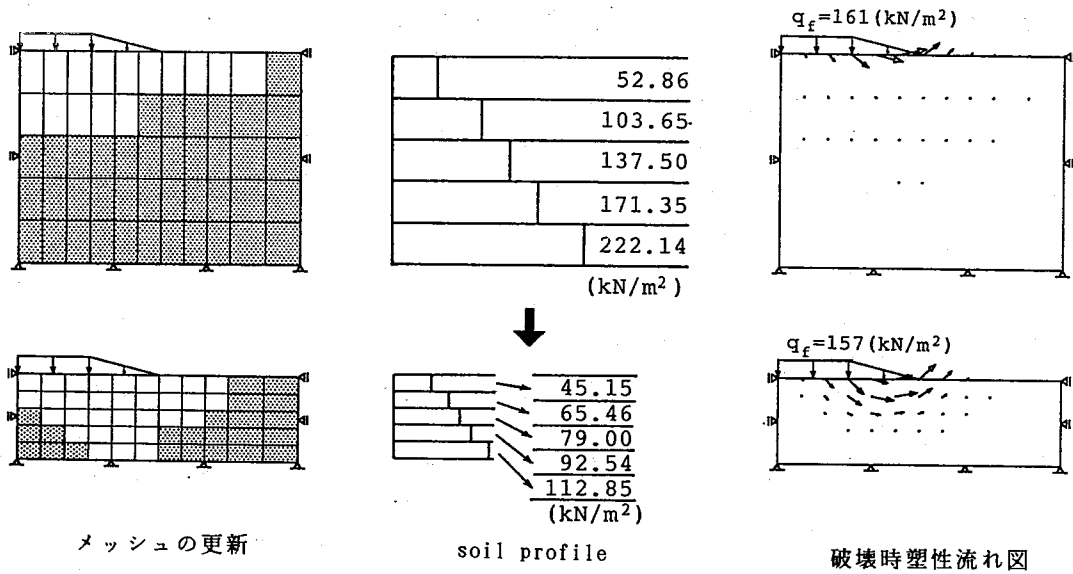


図12: Cam clay モデル

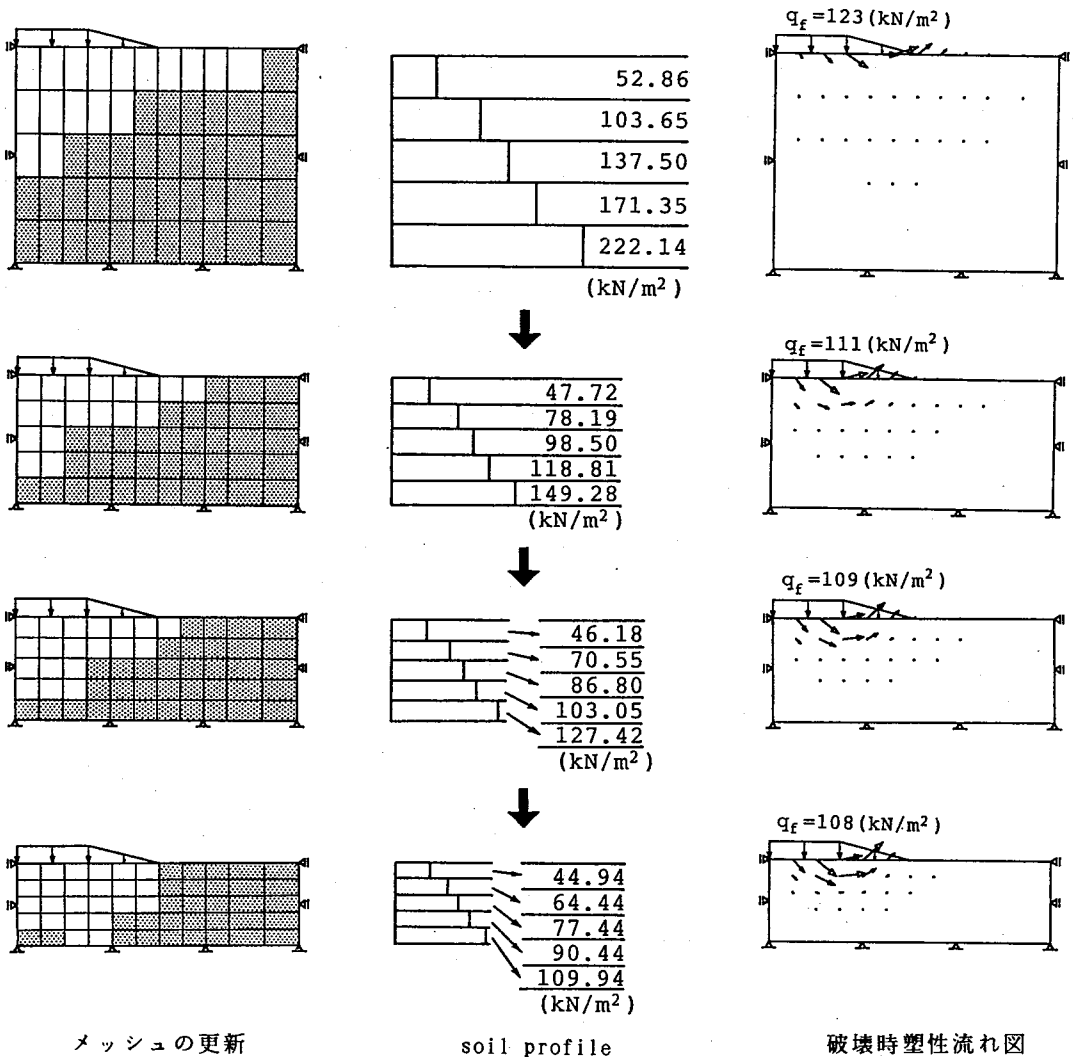


図13: 関口・太田モデル

図9, 図10は従来法でのsoil profileを用いて解析した結果である。図11は等価多層系地盤のsoil profileと剛体領域削除を組合わせた繰り返し計算手法による支持力の変化の様子を示している。極限つり合い式が上界定理から導かれることを考慮すれば、図11のように支持力値が計算過程に伴い減少して行くのは、徐々に正解に近づき計算精度が改善されていることを表している。

図12, 13は繰り返し計算過程での剛体領域の削除によるメッシュの更新とその場合のsoil profileを示す。図14は連成解析の結果得られる破壊時過剰間隙水圧分布である。

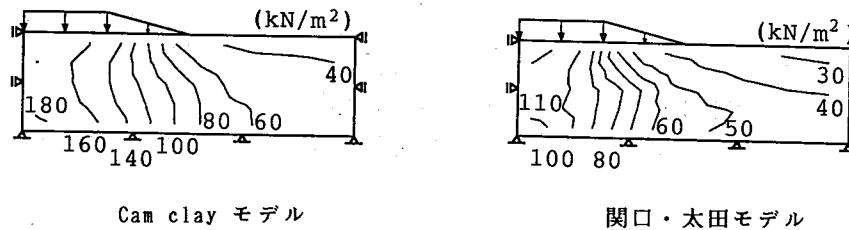


図14：破壊時過剰間隙水圧分布

4. おわりに

剛塑性有限要素法を深さ方向に強度が一定に増加する場合の飽和正規粘土地盤の支持力解析に適用した。等価多層系地盤のsoil profileを用いることと、剛体領域の削除による繰り返し計算によって、支持力値に10%以上の計算精度の改善が見られた。

参考文献

1. Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T.: Limit Analysis of Soil Structure by Rigid Plastic Finite Element Method, Soils and Foundations, Vol.24, No.1, pp.34-42(1984).
2. Asaoka, A. and Matsuo, M.: A Simplified Procedure for Probability-based $\phi_u=0$ Stability Analysis, Soils and Foundations, Vol.23, No.1, pp.8-18(1983).
3. Davis, E. H. and Booker, J. R.: The Effect of Increasing Strength with Depth on the Bearing Capacity of Clays, Geotechnique, Vol.23, No.4, pp.551-563(1973).
4. Asaoka, A. and Kodaka, T.: Seepage Failure Experiments and their Analysis of Loose and Medium Dense sands, Soils and Foundations, Vol.32, No.3, (1992).
5. Scofield, A. N. and Wroth, C. P.: Critical State Soil Mechanics, London, McGraw-Hill, (1968)
6. Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced Anisotropy and Time Dependency in Clays, Proc. of Specialty Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo, pp.229-238(1977).