

有限変形弾粘塑性構成式を用いた粘土地盤の有限要素解析

岐阜大学工学部 岡 二三生  
 岐阜大学大学院 小原 到

岐阜大学工学部 八嶋 厚  
 岐阜大学大学院 小野健司

1. はじめに

粘性土の挙動が、ひずみ速度依存性であることはよく知られている。Oka et al. (1986) は、Adachi and Oka (1982) によって提案された弾-粘塑性構成式を用いて2次元圧密解析を実施している。それらの解析は微小変形理論の枠組みのなかで行われている。近年、変形の局所化現象や破壊現象に関連して大変形解析が注目されている。本研究の目的は、Adachi and Oka によって提案された微小変形場での弾-粘塑性構成式を有限変形理論に拡張し、2次元有限要素解析を実施することにある。

Peirce et al. (1984) は、ひずみ速度依存性構成式の数値解析における解の安定性を向上させるために接線剛性法を提案している。そこで、まず第1に、Adachi and Oka による正規圧密粘土の弾-粘塑性構成式と Oka (1982) による過圧密粘土の弾-粘塑性構成式を Peirce et al. の提案した接線剛性法を用いて変形する。ついで、updated Lagrangian スキームを用いて、有限変形有限要素法を定式化する。最後に、正規圧密粘土の平面ひずみ圧縮試験の数値シミュレーションを実施する。

2. 数値解析法

2.1 構成式

まず弾性ストレッチングテンソル、 $D_{ij}^e$ 、とコーシー応力の共回転速度テンソル、 $\dot{\sigma}_{ij}^o$  の間に次のような関係を仮定する。

$$\dot{\sigma}_{ij}^o = C_{ijkl}^e D_{kl}^e = C_{ijkl}^e (D_{kl} - D_{kl}^{vp}) \quad (1)$$

ここで、 $C_{ijkl}^e$  は弾性剛性マトリックス、 $D_{ij}$  は全ストレッチングテンソル、 $D_{ij}^{vp}$  は粘塑性ストレッチングテンソルである。

正規圧密粘土 (Adachi and Oka, 1982) に関しては、関連流れ則を仮定し、

$$D_{ij}^{vp} = \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{ここで} \quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } F \leq 0 \\ \Phi(F) & \text{for } F > 0 \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $\sigma_{ij}$  はコーシー応力テンソルである。この構成式では、粘塑性体積ひずみが硬化パラメータとして用いられる。粘塑性体積ひずみ速度は式(2)を用いて次のように表わされる。

$$\dot{v}^{vp} = \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} \quad (3)$$

$\Phi(F)$  の時間微分をとると、

$$\dot{\Phi}(F) = \frac{\partial \Phi(F)}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^o + \frac{\partial \Phi(F)}{\partial v^p} \dot{v}^p \quad (4)$$

$\frac{\partial \Phi(F)}{\partial \sigma_{ij}}$  の対称性により、 $\dot{\sigma}_{ij}$  は  $\dot{\sigma}_{ij}^o$  で置き換えることができる。

$\langle \Phi(F) \rangle$  の増分は、式(4)を用いて求まる。

$$\Delta \Phi(F) = \Phi(F)_{t+\Delta t} - \Phi(F)_t = \Delta t \dot{\Phi}(F) = \frac{\partial \Phi(F)}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^o \Delta t + \frac{\partial \Phi(F)}{\partial v^p} \Delta v^p \quad (5)$$

ここで、 $\Phi(F)$  に関して線形の内挿を考えると、以下のようなになる。

$$\Phi(F) = (1 - \theta) \Phi(F)_t + \theta \Phi(F)_{t+\Delta t} \quad (6)$$

パラメータ  $\theta$  は、0 から 1 までの値をとる。 $\theta = 0$  は陽的な Euler 差分に対応する。一方、 $\theta = 1$  は完全陰的差分法に対応する。式 (5) を式 (6) に代入すると、

$$\Phi(F) = (1 - \theta)\Phi(F)_t + \theta\{\Phi(F)_t + \frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}\sigma_{ij}^o\Delta t + \frac{\partial\Phi(F)}{\partial v^p}\Delta v^p\} \quad (7)$$

さらに、式 (1) と (2) を式 (7) に代入して、

$$\Phi(F)[1 + (\theta\Delta t)\{\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}^e\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}} - \frac{\partial\Phi(F)}{\partial v^p}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pp}}\}] = \Phi(F)_t + \theta\Delta t\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}^eD_{kl} \quad (8)$$

最終的に、正規圧密粘土の弾-粘塑性構成式の接線剛性法による表現は、以下のである。

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl}^{tan}D_{kl} - C_{ijmn}^e\frac{\Phi(F)_t}{1 + \xi}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}} \quad (9)$$

ここで、

$$\xi = (\theta\Delta t)\{\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}^e\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}} - \frac{\partial\Phi(F)}{\partial v^p}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pp}}\} \quad (10)$$

$$C_{ijkl}^{tan} = C_{ijkl}^e - C_{ijmn}^e\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\frac{\theta\Delta t}{1 + \xi}\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{pq}}C_{pqkl}^e \quad (11)$$

過圧密粘土 (Oka, 1982) に関しては、非関連流れ則が仮定される。

$$D_{ij}^{vp} = \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{ij}} \quad (12)$$

ここで、 $f_p$  は塑性ポテンシャルを意味する。過圧密粘土では、次に示す塑性ひずみ測度  $\gamma^p$  を硬化パラメータとして用いる。

$$\gamma^p = \int \dot{\gamma}^p dt \quad \text{where} \quad \dot{\gamma}^p = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}} \quad (13)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$  は粘塑性偏差ひずみ速度テンソルである。 $\Phi(F)$  の時間微分をとると、

$$\dot{\Phi}(F) = \frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}\sigma_{ij}^o + \frac{\partial\Phi(F)}{\partial\gamma^p}\dot{\gamma}^p \quad (14)$$

最終的に、過圧密粘土に関する弾-粘塑性構成式の接線剛性法による表現は以下のようにになる。

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl}^{tan}D_{kl} - C_{ijmn}^e\frac{\Phi(F)_t}{1 + \xi'}\frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{mn}} \quad (15)$$

ここで、

$$\xi' = (\theta\Delta t)[\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}^e\frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{kl}} - \frac{\partial\Phi(F)}{\partial\gamma^p}\{\frac{\partial f_p}{\partial S_{ij}}\frac{\partial f_p}{\partial S_{ij}}\}^{1/2}] \quad (16)$$

$$C_{ijkl}^{tan} = C_{ijkl}^e - C_{ijmn}^e\frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{mn}}\frac{\theta\Delta t}{1 + \xi'}\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{pq}}C_{pqkl}^e \quad (17)$$

## 2. 2 有限要素定式化

土粒子骨格の変形と間隙水移動の連成問題の支配方程式は、Biot (1962) の 2 相混合体理論を用いて導かれる。支配方程式をまとめると、以下のようなものである。

a) つりあい式

$$\text{div}S_t = 0 \quad (18)$$

b) 有効応力の定義

$$T = T' + p_w 1 \quad (19)$$

c) 構成式

$$T'^o = CD - R \quad (20)$$

d) 連続式

$$\text{tr}D + \frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 p_w = 0 \quad (21)$$

これらに加えて、境界条件および初期条件が必要である。上式で、 $S_t$  は全公称応力テンソル、 $T$  はコーシー応力テンソル、 $T'$  は有効応力テンソル、 $p_w$  は間隙水圧、 $T^{\circ}$  は有効コーシー応力の共回転速度、 $D$  はストレッチング、 $k$  は透水係数、 $\gamma_w$  は間隙水の単位体積重量、 $C$  は式 (11) と (17) で定義された  $C_{ijkl}^{tan}$ 、そして  $R$  は式 (10) と (16) の右辺第 2 項である。

Updated Lagrangean スキームを用いて、支配方程式を時刻  $t + \Delta t$  で離散化すると、以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} [K] & [K_v]^T \\ [K_v] & -\Delta t[K_h] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d^N \\ p_w|_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta F\} + [K_v]^T + \int_v [B]^T [R] dv \\ \Delta t[V] \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ここで、 $\{\Delta d^N\} = \Delta t\{v^N\}$  は、 $\Delta t$  における節点変位増分、 $[K]$  は剛性マトリックス、 $[k_v]$  は節点速度を体積ひずみ速度に変換するためのマトリックス、 $[V]$  は境界を通過する水 flux に対応するベクトルである。支配方程式の離散化については、Yatomi et al. (1989) に詳しいのでここでは詳細を省略する。本解析では、節点変位を 8 節点で、間隙水圧を要素隅の 4 節点で定義した。

### 3. 数値解析例

解析に用いた正規圧密粘土の材料定数を表-1 に示す。解析では、次のように定義される関数  $\Phi(F)$  (Adachi and Oka, 1982) を用いている。

$$\Phi(F) = C \exp[m' \ln(\sigma_{my}^{(d)} / \sigma_{my}^{(s)})] \quad (23)$$

ここで、 $C$  と  $m'$  は材料の時間依存性に関するパラメータ、 $\sigma_{my}^{(d)}$  と  $\sigma_{my}^{(s)}$  はひずみ硬化パラメータである。

表-1 足立・岡モデルの材料定数

圧縮指数	$\lambda$	0.355	膨潤指数	$\kappa$	0.0477
初期平均有効応力	$p_0$	1.0 (kgf/cm <sup>2</sup> )	初期間隙比	$e_0$	2.0
粘塑性パラメータ	$m'$	12.8	粘塑性パラメータ	$C$	$2.85 \times 10^{-8}$ (1/sec.)
破壊時の応力比	$M^*$	1.45	ポアソン比	$\nu$	0.33

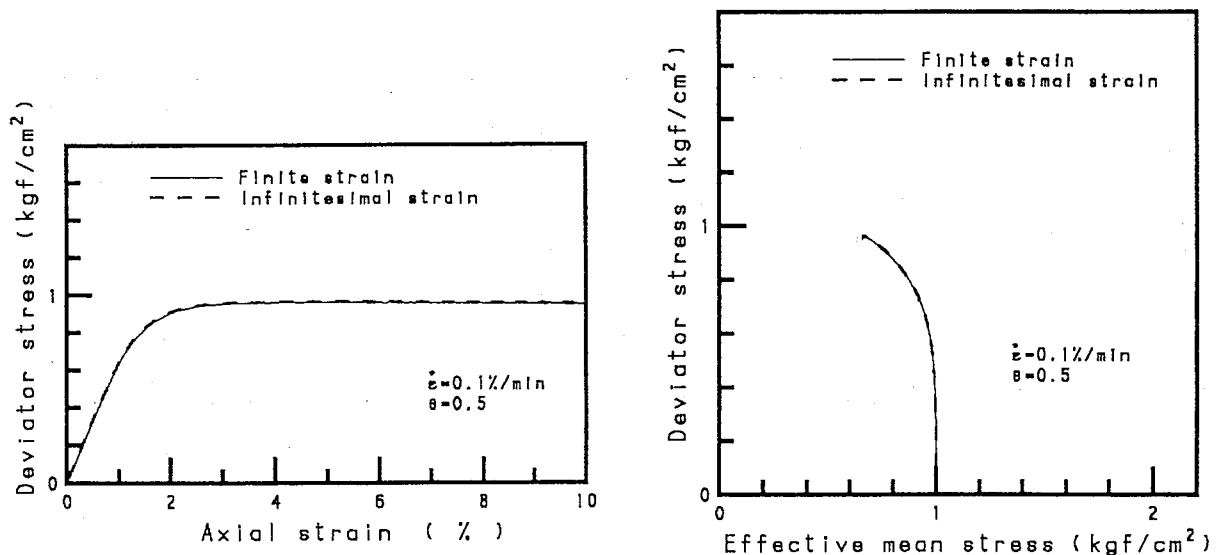


図-1 有限変形と微小変形による非排水平面ひずみ圧縮試験の応力～ひずみ関係と有効応力径路

数値解析手法の妥当性を検証するために、非排水平面ひずみ圧縮試験の数値シミュレーションを行った。微小ひずみ有限要素法とここで紹介した有限変形有限要素法の両者の解析結果を比較した。ひずみ速度は、0.1%/min および  $\theta = 0.5$  を採用した。図-1 に応力-ひずみ関係と有効応力径路を示す。有限変形理論の応力-ひずみ関係は対数ひずみを用いて描かれている。図より、両者の結果は精度よく一致していることがわかる。

接線剛性法の有効性を検討するために、図-2 と図-3 を用意した。異なる  $\theta$  の値を用いて解析を行った結果である。また、ひずみ増分についても2オーダーの範囲で変化させた。応力-ひずみ関係を図-2 に、有効応力径路を図-3 にそれぞれプロットした。 $\theta = 0$  という条件は陽的 Euler 差分に相当する。そのため、安定した解を求めるためには、非常に小さなひずみ増分を用いなければならないことがわかる。一方、陰的差分に対応する  $\theta = 0.5$  と  $1.0$  の条件下では、 $\theta = 0$  の結果よりも安定的な結果が得られることがわかる。

ひずみ速度効果は、解析で容易に表現することができる。図-4 には、異なるひずみ速度のもとでの応力-ひずみ関係と有効応力径路が示されている。ここでは、 $\dot{\epsilon} = 0.01\%/min.$ 、 $0.1\%/min.$ 、 $1.0\%/min.$  が採用された。これらの図より、正規圧密粘土のひずみ速度依存性が理解できる。

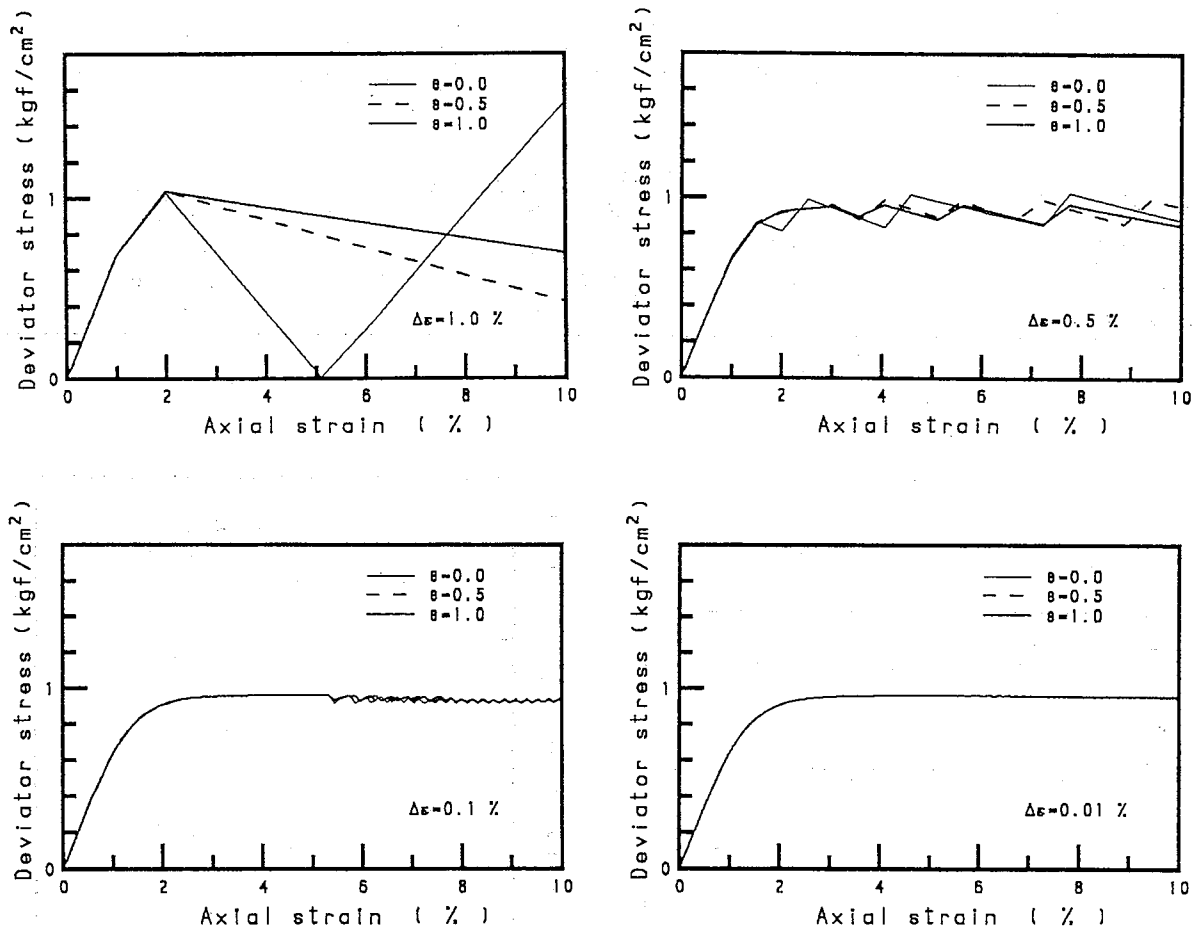


図-2  $\theta = 0, 0.5, 1.0$  の場合の応力~ひずみ関係

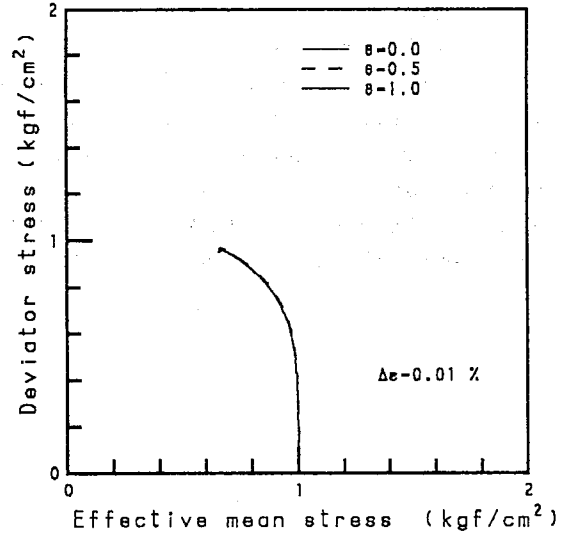
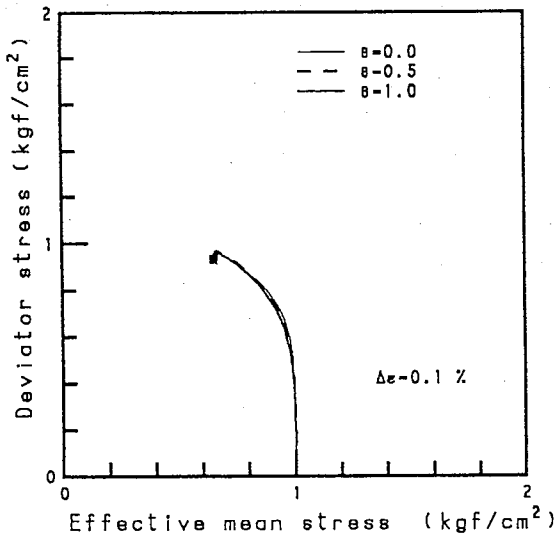
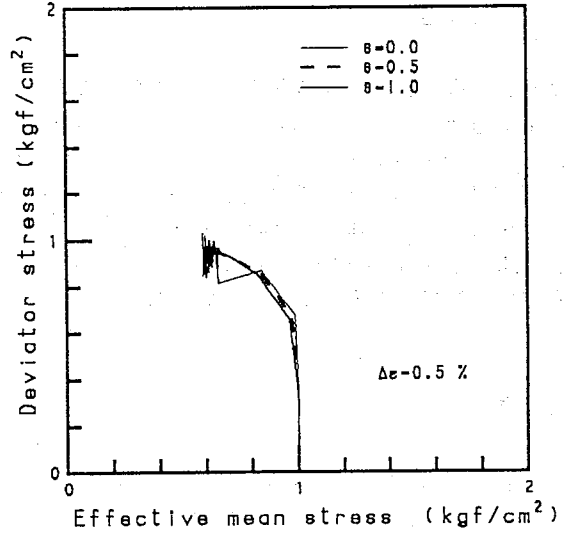
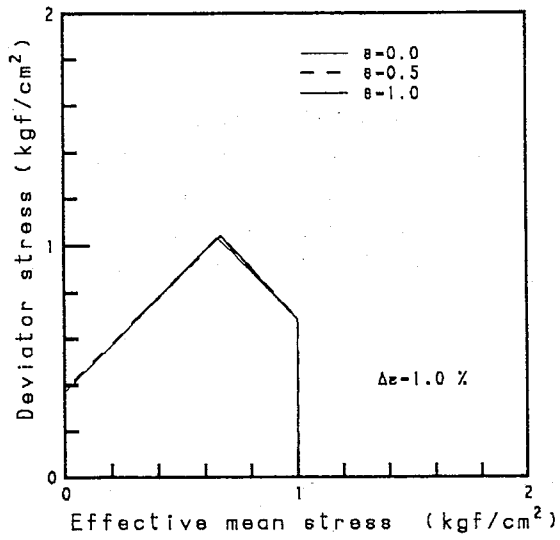


図-3  $\theta=0, 0.5, 1.0$  の場合の有効応力経路

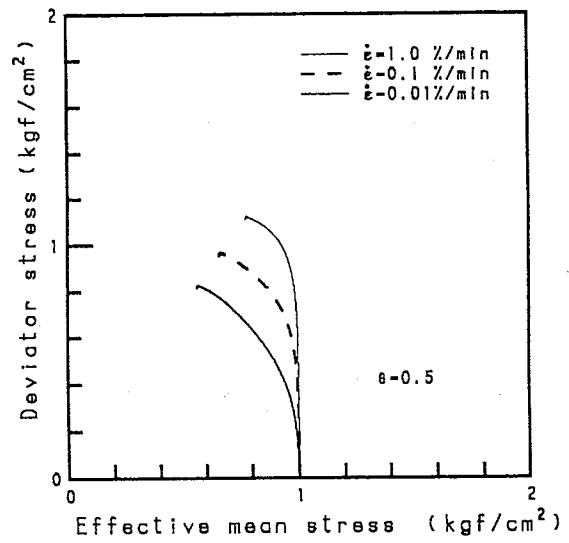
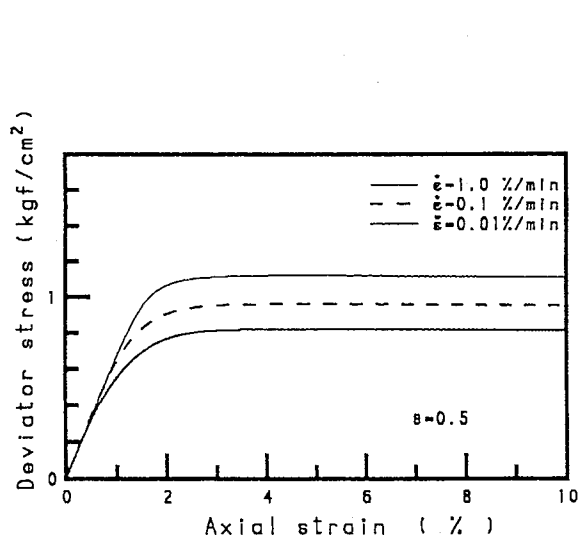


図-4 ひずみ速度依存性について

#### 4. おわりに

本研究で得られた主な知見は以下のとおりである。

1. 正規圧密粘土と過圧密粘土の弾-粘塑性構成式が接線剛性法と有限変形理論を用いて拡張された。
2. Updated Lagrangian スキームを用いて、有限変形理論の枠組みで有限要素法の定式化が行われた。
3. 提案した有限変形有限要素法の妥当性は、微小変形の解析結果と比較することにより検討された。その結果、提案した手法は非排水平面ひずみ圧縮試験の数値シミュレーションにおいて十分な精度を示した。
4. 正規圧密粘土の非排水平面ひずみ圧縮試験数値シミュレーションより、接線剛性法が陽的差分法に比べ、より安定的な結果を与えることがわかった。

#### 参考文献

1. Adachi, T. and Oka, F. Constitutive equations for normally consolidated clay based on elasto-viscoplasticity, *Soils and Foundations*, Vol.22, No.4, 57-70 (1982).
2. Oka, F. Elasto-viscoplastic constitutive equation for overconsolidated clay, *Int. Sympos. on Numerical Models in Geomechanics*, Zurich, 147-156 (1982).
3. Oka, F., Adachi, T. and Okano, Y. Two-dimensional consolidation analysis using an elasto-viscoplastic constitutive equation, *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.10, No.1, 1-16 (1986).
4. Peirce, D., Shih, C.F. and Needleman, A. A tangent modulus method for rate dependent solids, *Computers and Structures*, Vol.18, No.5, 875-887 (1984).
5. Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I. Shear bands formation numerically simulated by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.4, 1-13 (1989).