

円弧すべり法の力学的考察

名古屋大学 工学部 正 ○大塚 悟
 名古屋大学 工学部 正 浅岡 顕
 名古屋大学 工学部 正 松尾 稔

1. はじめに

地盤の安定性評価は一般に分割法による円弧すべり安定解析によって行われることが多い。分割・円弧すべり法は剛体ブロックとすべり線を仮定し、各帯片の力の釣り合い式を解くことから、応力場と変位速度場の両者を同時に取扱う。しかも、幾つかのすべり線を仮定して、最も安全率を小さくする際のすべり線(破壊形態)を探索することから、従来、得られた解の力学的意味はそれほど明らかにされていない。

そこで本研究では極限解析(上界定理)を用いて分割・円弧すべり法を考察し、併せて分割・非円弧すべり法の解析手法を提案する。

2. 上界定理と極限釣り合い式

物体が一定荷重の下で際限なく変形する状態($\dot{\epsilon}_{ij}^P \neq 0$)を塑性崩壊という。弾完全塑性体では、塑性崩壊の状態が荷重経路に依存せず最後の荷重形態によって決まる性質があり、この性質を利用して直接崩壊荷重を求める方法に極限解析(上界・下界定理)がある。

いま地盤にかかる荷重系を、物体力 X_i 、応力境界 S_σ での表面力 T_i を用いて $\rho(X_i, T_i)$ と表すと(ρ は load factor)、地盤の安定性に関する境界値問題は塑性崩壊時の load factor ρ^* を定めることになる。

上界定理は任意の許容塑性崩壊機構 K (変位速度の境界条件および適合条件を満足する)に対して、外力仕事率と塑性エネルギー消散率 $D(\dot{\epsilon}_{ij}^P) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P$ を等置して、

$$\rho \left(\int_V X_i \dot{u}_i dv + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i ds \right) = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^P) dv \quad (1)$$

$$\int_V X_i \dot{u}_i dv + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i ds > 0 \quad (2)$$

得られる解 ρ が真値 ρ^* を下回らないことを保証する。

$$\rho^* \leq \rho \quad (3)$$

したがって上界定理に基づく極限解析は、あらゆる許容塑性崩壊機構の中から load factor ρ を最小化することから、以下の問題に帰着する。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^P) dv \\ & \text{with respect to } (\dot{\epsilon}_{ij}^P, \dot{u}_i) \in K_p \\ & K_p = \{ (\dot{\epsilon}_{ij}^P, \dot{u}_i) \in K \mid \\ & \int_V X_i \dot{u}_i dv + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i ds = 1 \} \\ & K: \text{許容塑性崩壊機構} \end{aligned} \quad (4)$$

ところが、塑性エネルギー消散率 D が塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ の凸関数であることから、上界定理は制約条件式(4)の下での局所的最小化問題に帰着する。Lagrange の未定係数 μ を用いて汎関数を作成すると、停留条件から次の連立方程式を得る。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij}^P dv = -\mu \left(\int_{S_\sigma} T_i \delta \dot{u}_i ds + \int_V X_i \delta \dot{u}_i dv \right) \quad (5)$$

$$\delta \mu \left(\int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i ds + \int_V X_i \dot{u}_i dv - 1 \right) = 0 \quad (6)$$

式(5)、(6)より $\rho^* = -\mu$ が成立し、支配方程式(5)は塑性崩壊時の仮想仕事式(力の釣り合い式に等価)であることが分る。

このように、上界定理は物体の運動学的条件と、塑性エネルギー消散率の収支関係に注目して、全く力の釣り合い式を考慮しないにもかかわらず、上界値の最小化を行うと、上界計算式(1)は塑性崩壊時の極限釣り合い式に等価になる性質がある。

降伏関数に直線部分のある場合には $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ に対して応力が不定になるが、流れ則より $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ に関する制約条件を設

Some considerations on method of slices:

Satoru OHTSUKA, Akira ASAOKA and Minoru MATSUO(Nagoya University)

定して汎関数に取込むと、対応する Lagrange 係数が物理的意味を有して式(5)と同様の極限釣り合い式を誘導できる (Tamura et al.,1987)。

3. 分割法による円弧すべり計算

上界定理を用いて図1の斜面安定問題の定式化を行う。すべり線は円弧を仮定し、円弧の中心位置および半径 R を操作する。円弧によるすべり線は運動学的に可容である。全体を n 個の帯片に分割し、各帯片を剛体と仮定すると、上界計算式(1)は中心周りの角回転速度 $\dot{\theta}$ を用いて

$$\rho \sum_i W_i R \sin\alpha_i \dot{\theta} = \sum_i T_i R \dot{\theta} \quad (7)$$

と表される (W_i および T_i は各帯片の自重およびすべり線上のせん断力)。ここに ρ は物体力に関する load factor で、安全率に対応する。

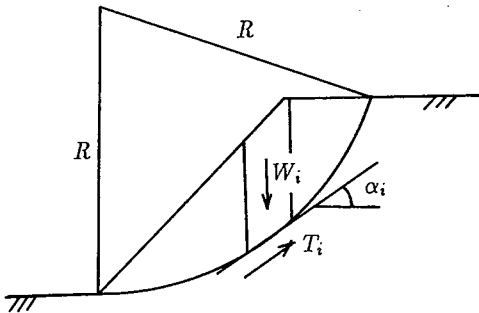


図1 円弧すべりと分割法

上界計算は円弧の中心位置および半径を操作して式(7)から得られる ρ (安全率) を最小化することに帰着する。2. で述べたように、上界計算式(7)は ρ (安全率) の最小値において、はじめて力の釣り合い式に等価になるが、このとき式(7)は円弧の中心周りのモーメントの釣り合い式(の弱形式)になることが分る。

長大斜面のように表層で一様なすべりの生じる場合でも、上界計算は式(7)の $R \rightarrow \infty$ の場合に相当し、安全率の最小化により得られるのはモーメントの釣り合い式であり、鉛直または水平方向の力の釣り合い式でないことに注意する。

地盤が粘着力からなる c 材料の場合には、すべり線上のせん断力 T_i は次式のように表され、

$$T_i = c l_i \quad (8)$$

式(7)、(8)より斜面の安全率を求めることが可能になる (l_i は各帯片のすべり線の長さ、図2参照)。

ところが、地盤が $c\phi$ 材料の場合にはせん断力 T_i が

$$T_i = c l_i + N_i \tan\phi \quad (9)$$

のようにすべり線に作用する垂直力 N_i の関数であることから、式(7)、(9)の他に別途異なる方程式が必要になる。そこで、帯片間の鉛直および水平方向の力の釣り合い式を用いると(以下、 $\Delta(\cdot)_i = (\cdot)_{i+1} - (\cdot)_i$ とする)、

$$T_i = (W_i + \Delta V_i) \sin\alpha_i + \Delta E_i \cos\alpha_i \quad (10)$$

$$N_i = (W_i + \Delta V_i) \cos\alpha_i - \Delta E_i \sin\alpha_i \quad (11)$$

支配方程式は全て Bishop の円弧すべり法に一致する。実際に Bishop 法と同様に安全率を次のように強度に対して定義して上界計算を行うと、

$$T_i = (c l_i + N_i \tan\phi) / F_s \quad (12)$$

$$\sum_i W_i R \sin\alpha_i \dot{\theta} = \sum_i T_i R \dot{\theta} \quad (13)$$

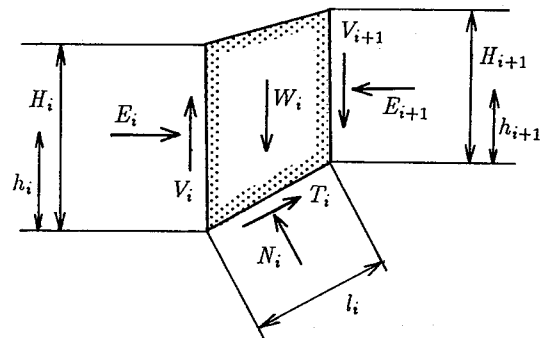


図2 帯片に作用する力

Bishop 法と同じ安全率の算定式を得る。

$$F_s = \frac{\sum_i [c l_i \cos\alpha_i + (W_i + \Delta V_i) \tan\phi]}{\sum_i W_i \sin\alpha_i} / m_i \quad (14)$$

$$m_i = \cos\alpha_i + \frac{1}{F_s} \sin\alpha_i \tan\phi \quad (15)$$

以上から、Bishop の円弧すべり法による解は常に真の安全率を下回ることがなく、安全率を最小化した時に、式(10),(11),(13)は力の釣り合い式を表す連立方程式 ($\nabla \cdot \sigma = \mathbf{o}$, $\sigma = \sigma^T$) に等価になることが分る。

4. 内部エネルギー消散率の考察

地盤を $c\phi$ 材料と見做して、応力~ひずみ速度関係を Mohr-Coulomb 型の降伏関数に基づく関連流れ則によって記述すると、すべり線(図3)に沿う塑性エネルギー消散率 D はダイレタンシーにより次のように、

$$D = T_i \dot{u} - N_i \dot{u} \tan\phi = (c l_i + N_i \tan\phi) \dot{u} - N_i \dot{u} \tan\phi = c l_i \dot{u} \quad (16)$$

内部摩擦角 ϕ に無関係に記述される。ところが、Bishop 法に基づいてエネルギー消散率を求めると、式(12)、(13)から ($F_s = 1$ のとき)、

$$D = T_i R \dot{\theta} = T_i \dot{u} = (c l_i + N_i \tan\phi) \dot{u} \quad (17)$$

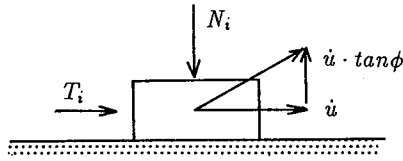


図3 すべり線上の応力～ひずみ速度関係

となり、式(16)と異なって極限状態で体積変化のない、図3の $\dot{u} \tan \phi = 0$ の場合に相当する。すなわち、Bishopの安定解析ではせん断力はMohr-Coulombの破壊規準式に従うものの、破壊規準での降伏関数は体積変化のないMises型による解析を要求している。ところが、せん断力の分布は力の釣り合い式(10)、(11)を満足する垂直力によってMohr-Coulomb規準より与えられることから、Mises強度定数はすべり線に沿って著しく不均質であることに注意する。地盤が粘着力からなるc材料の場合には、式(16)、(17)の差異がない。

5. 分割・非円弧すべり法の力学的考察

円弧すべり法と同様に、図4の非円弧すべりに対して上界定理を適用する。水平方向の変位速度 \dot{u} を用いて破壊モードを表すと上界計算式(1)は次式になる。安全率は式(12)、(13)のように強度に対する定義を用いた。

$$\sum_i T_i \frac{\dot{u}}{\cos \alpha_i} + \sum_j V_j \Delta \tan \alpha_j \dot{u} = \sum_i W_i \dot{u} \tan \alpha_i \quad (18)$$

上式の左辺第2項は帯片間のすべり線における相対的変位速度、 $\Delta \tan \alpha_j \dot{u} = (\tan \alpha_{j+1} - \tan \alpha_j) \dot{u}$ に基づくエネルギー消散率であるが、次のように変形することができる。簡単のために、境界での外力、 $V_1 = V_{n+1} = 0$ とした。

$$\sum_j V_j \Delta \tan \alpha_j \dot{u} = - \sum_i \Delta V_i \dot{u} \tan \alpha_i \quad (19)$$

したがって、式(18)は次式となる。

$$\sum_i T_i \frac{\dot{u}}{\cos \alpha_i} = \sum_i (W_i + \Delta V_i) \dot{u} \tan \alpha_i \quad (20)$$

式(12)、(20)による上界値の最小化演算(この場合には T_i 中の F_s を最小化する)を行うと式(20)は水平方向の力の釣り合い式(10)の積分形の仮想仕事式に一致し、半径 $= \infty$ のモーメントの釣り合い式と等価である。したがって円弧すべり法と同様に式(10)、(11)、(20)は力の釣り合いを表す連立方程式に帰着することが分る。したがって安全率 F_s は次式によって与えられる。

$$F_s = \frac{\sum_i [c l_i \cos \alpha_i + (W_i + \Delta V_i) \tan \phi]}{\sum_i (W_i + \Delta V_i) \tan \alpha_i} \quad (21)$$

$$n_i = m_i \cos \alpha_i \quad (22)$$

式(10)、(11)、(12)、(20)による上界計算はJanbuによる非円弧すべり法と一致する。

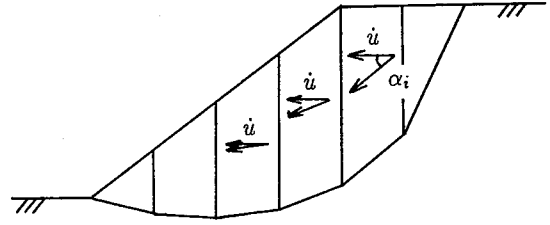


図4 運動学的に可容な非円弧すべり変位速度場

6. 静定化条件の問題点

3.~5.では分割法を用いた円弧すべり法および非円弧すべり法について考察し、Bishop法およびJanbu法が上界計算の一手法であることを示した。しかし、これらの方法は式(14)、(15)または式(21)、(22)から分るように場の方程式が不足していて、このままでは安全率を求めることができない。したがって、安全率の計算を行うには ΔV_i を定めるための静定化条件が必要となる。

Bishop法およびJanbu法では静定化条件に $\Delta V_i = 0$ を仮定する簡便法を用いたり、各帯片の底面中点に関するモーメントの釣り合い式、

$$(V_i + V_{i+1}) \frac{l_i}{2} \cos \alpha_i - E_i (h_i - \frac{l_i}{2} \sin \alpha_i) + E_{i+1} (h_{i+1} + \frac{l_i}{2} \sin \alpha_i) = 0 \quad (23)$$

を用いる解析法が提案されている (h_i は底面から測った E_i の着点高さ、図2参照)。しかし、 $\Delta V_i = 0$ と仮定すると、Janbu法の場合に式(18)、(19)に示すように帯片間の相対的変位速度による内部エネルギー消散を無視することになったり、また支持力問題のように載荷重によるせん断力によって地盤の破壊する問題では、この仮定により著しい誤差の生じる可能性がある。他方、式(23)による帯片の底面中点に関するモーメントの釣り合い式を用いる方法(厳密法)は簡便法の欠点を改良しているものの、帯片の側面に作用する垂直力 E_i の着点高さ h_i を新たに仮定する必要があり、曖昧な静定化条件になっている。

7. 上界定理に基づく分割・非円弧すべり法の提案

Bishop法およびJanbu法が上界計算の1手法であることに着目して、全域塑性化の仮定に基づいて各帯片間の力のやりとりに式(12)と同様にMohr-Coulomb規準による強度式を用いる (H_i は帯片の側面長)。

$$V_i = \frac{1}{F_s} (c H_i + E_i \tan \phi) \quad (24)$$

特に、Janbu 法の場合には上界計算式 (18) に示すように帯片間で相対的な変位速度を有することから、帯片間のすべり線上でせん断強度が発揮される式 (24) の仮定は極めて自然に受入れられる。この条件を 6. で考察した静定化条件に用いると、Janbu 法による安全率は次の式で与えられる。

$$F_s = \frac{\sum_i [T_i + W_i \sin \alpha_i \tan \alpha_i \tan \phi - c \Delta H_i \sin \alpha_i] / m_i}{\sum_i W_i \tan \alpha_i} \quad (25)$$

ここに、

$$T_i = \frac{(F_s W_i + c \Delta H_i) \tan \phi + c l_i (\sin \alpha_i \tan \phi + F_s \cos \alpha_i)}{F_s \cos \alpha_i + 2 \sin \alpha_i \tan \phi - 1 / F_s \cos \alpha_i \tan^2 \phi} \quad (26)$$

帯片間に相対的な変位速度のない場合には帯片の側面に真に作用するせん断力 V_i^* は

$$V_i^* \leq V_i \text{ (式(24)による)} \quad (27)$$

となるが、剛体ブロックとすべり線を仮定する円弧・非円弧すべり法ではこの V_i^* を正しく評価することは難しい。

提案法と本研究で取上げた幾つかの慣用解析との比較・考察を行うために図 5 に示す斜面の安定解析を行う。地盤は $c\phi$ 材料とし、 $c = 1t/m^2$ 、 ϕ を変化させる。 $\gamma = 1.8t/m^3$ とした。解析結果を表 1 (斜面傾角 $\theta = 30^\circ$)、および表 2 (斜面傾角 $\theta = 60^\circ$) に掲げる。

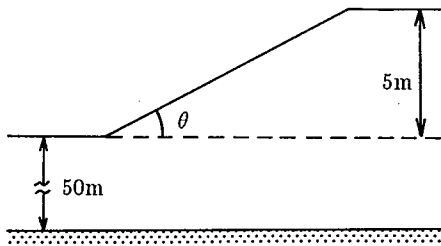


図 5 解析の境界条件

表 1、2 の数値解析より以下のことが分る。

- (1) 簡便 Bishop 法と簡便 Janbu 法は共に $\Delta V_i = 0$ を仮定するが、簡便 Janbu 法はより広範囲の運動学的可能な速度場を探索することから、より小さい安全率を与える。
- (2) 非円弧すべり法を比較すると、簡便 Janbu 法は帯片間の相対的な変位速度に基づくエネルギー消散を無視することから、厳密 Janbu 法や提案法に対して小さい安全率を与える。
- (3) 数値事例では簡便 Bishop 法の解がよく提案法に一致しており、円弧すべりと $\Delta V_i = 0$ の仮定が工学的に優れていることが分る。

表 1: 安全率の比較 ($\theta = 30^\circ$)

	簡便	簡便	厳密	提案法
	Bishop 法	Janbu 法	Janbu 法	
$\phi = 0^\circ$	0.63	0.60	0.66	0.83
$\phi = 10^\circ$	1.28	1.12	1.22	1.38
$\phi = 20^\circ$	1.89	1.58	1.76	1.91
$\phi = 30^\circ$	2.40	2.07	2.29	2.52
$\phi = 40^\circ$	2.98	2.62	2.84	3.35

表 2: 安全率の比較 ($\theta = 60^\circ$)

	簡便	簡便	厳密	提案法
	Bishop 法	Janbu 法	Janbu 法	
$\phi = 0^\circ$	0.62	0.55	0.57	0.72
$\phi = 10^\circ$	0.89	0.80	0.86	0.98
$\phi = 20^\circ$	1.15	1.02	1.19	1.24
$\phi = 30^\circ$	1.43	1.25	1.52	1.53
$\phi = 40^\circ$	1.72	1.51	1.88	1.96

8. おわりに

本研究で得られた結論を箇条書きにする。

- (1) 円弧・非円弧すべり法は上界計算の 1 手法であり、安全率を最小化した時にはじめて力の釣り合い式 ($\nabla \cdot \sigma = 0$, $\sigma = \sigma^T$) が満足される。
- (2) 円弧・非円弧すべり法はせん断力が Mohr-Coulomb の破壊規準に従う場合にも、限界状態で体積変化の生じない不均質 Mises 材の解析を要求する。
- (3) 上界定理に基づいて非円弧すべり仮定を用いた安定解析法を提案した。
- (4) 簡便 Bishop 法は理想化・単純化による誤差が打消し合い、比較的精度の良い解を与える。

参考文献

- (1) Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T. (1987): "Rigid-plastic finite element method for frictional materials," Soils and Foundations, Vol.27, No.3, pp.1-12.
- (2) Maier, G. (1977): Engineering plasticity by mathematical programming (ed. by Cohn M.Z. and Maier G.), Chap.6, Pergamon press.
- (3) 山口柏樹 (1985): 土質力学 (全改訂)、第 7 章、技報堂。