

摩擦を考慮した動的変形解析による stick-slip 試験の要素性に関する検証
Validation of elementality on stick-slip experiment
by dynamic deformation analysis considering friction

安池亮¹, 豊田智大², 野田利弘²

1 名古屋大学大学院・工学研究科土木工学専攻・yasuike.ryo.z9@s.mail.nagoya-u.ac.jp
2 名古屋大学大学院・工学研究科土木工学専攻

概 要

構成モデルの開発・妥当性検証に際して行われる力学試験（要素試験）は、諸量の空間分布が時々刻々と変化する「初期値境界値問題」であり、試験者は常にその効果を踏まえた実験事実の解釈が求められる。本稿では、著者らが提案した上下負荷面摩擦モデルを搭載した動的微小変形弾性解析を用いて、摩擦構成則の Validation に使用される Heslot et al.¹⁾による摩擦試験の初期値境界値問題としての効果について検証を行った。その結果、荷重載荷点位置に応じた接触力分布の非一様化が確認されたほか、すべり状態にある物体の摩擦力評価における慣性力考慮の必要性が示唆された。

キーワード：摩擦, Stick-slip, 弾塑性, 構成式, 動的解析

1. はじめに

地盤変形解析をはじめとした固体変形解析の境界条件は、通常、変位既知の Dirichlet 境界条件と荷重既知の Neumann 境界条件の二者択一で与えられる。しかし、二物体間の接触面は、固着状態とすべり状態を遷移する強非線形現象を呈する。したがって、杭の貫入／引抜などの構造物と地盤の相互作用問題を詳細に理解するためには、接触面の過渡的現象および接触力変動を記述可能な摩擦モデルおよびそれを導入した地盤の変形解析の開発が求められる。

著者らはこれまで、接触面の固着状態～すべり状態の遷移に伴う連続的な摩擦力変化を記述可能な弾塑性摩擦構成則として、上下負荷面摩擦モデル²⁾を開発してきた。同モデルは、Ozaki et al.³⁾の下負荷面摩擦モデルに Asaoka et al.⁴⁾の上負荷面概念を導入したモデルである。動摩擦より大きな静止摩擦力が接触面の構造（凝着作用）に起因して発現すると考え、その発展則として、静止摩擦から動摩擦への強度低下（塑性すべりに伴う構造の喪失）および動摩擦から静止摩擦への強度上昇（時間経過に伴う構造の回復）を表現している。さらに、既報⁵⁾では、同モデルを連続体の境界条件（接触力境界条件）として適用した動的微小変形弾性解析手法を開発し、単純せん断場における法線応力の非一様化に伴う接触面上のすべり伝播挙動の解明を行ってきた。

ところで、構成モデルの開発時には、力学試験（要素試験）が行われ、その結果に基づいたモデルの Validation が

なされるが、その挙動は対象領域内で変形および状態量の分布が一様であることを前提として解釈される。代表的な摩擦実験としては、Heslot et al.¹⁾が考案した図 1 の試験機が挙げられる。同試験機は、固定された平板上に置かれた試験体を板バネにより載荷して stick-slip 現象を発生させる plate-on-plate 型の試験機である。詳細は次章に譲るが、Ozaki et al.³⁾は同様の試験機により試験体の上載荷重を変えた実験結果と、下負荷面摩擦モデルを組み込んだ質点動力学計算の結果の比較により、モデルの Validation を実施している。しかし、実現象は、試験体の幾何形状や荷重載荷点位置によって接触面の接触力分布が変化する「初期値境界値問題」であると考えられる。したがって、摩擦試験に潜む「初期値境界値問題」としての効果を検証しておくことは、実験結果を適切に解釈する上で極めて重要である。

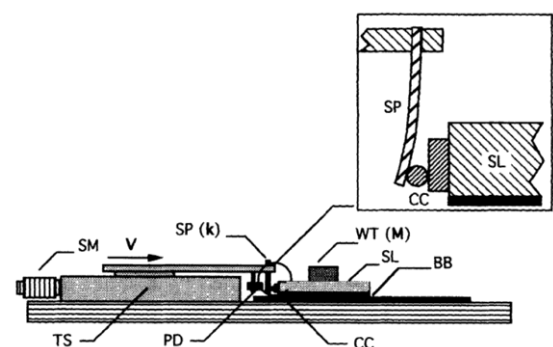


図 1 Stick-slip 試験機の概形 (Heslot et al.¹⁾ より)

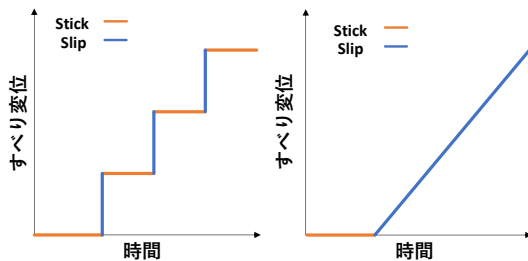
そこで本稿では、上下負荷面摩擦モデルを搭載する動的微小変形弾性解析を拡張し、plate-on-plate 型の摩擦実験の再現解析を行う。同試験における初期値境界値問題としての効果を明らかにすることで、質点動力学問題（初期値問題）と見做すことの是非を論じる。そして、計算結果により明らかとなった、stick-slip 試験を行う上での実施・計測方法に関する留意事項について指摘する。

2. Plate-on-plate 型 stick-slip 試験機の概要

本章では、Heslot et al.¹⁾が開発した図 1 の試験機による plate-on-plate 型の stick-slip 実験について概説する。本試験は、底面となる基板の上に 2 mm 厚の Bristol board を敷き、その上に Slider (SL) となる物体が設置されている。Slider は 1 cm 厚のジュラルミンの底面に 2 mm 厚の Bristol board が接着してあり、基盤と接触面積 100 cm² (10 cm×10 cm) で接する 300 g の物体である。また、おもり (WT) を Slider 上に載せることで接触面に作用する垂直抗力（法線応力）を可変にしている。また、ステッピングモーター (SM) により水平方向に一定速度 V で駆動するステージ (TS) の先端に板バネ (SP) が取り付けられており、この板バネを介して Slider に水平荷重（復元力）が作用する機構となっている。また、板バネのたわみによる載荷点位置の変化を低減するために、円筒状のシリンダー (CC) が板バネの先端に取り付けられている。

本試験機では次の 1)～3)のプロセスを繰り返すことで、図 2 (a)に示すような階段状のすべり変位と時間関係を示す間欠現象（stick-slip 現象）を発生させる。

- 1) ステージの移動に伴い板バネがたわむことで Slider に復元力が作用する（Stick 状態）
- 2) 板バネの復元力が接触面の最大静止摩擦力を超過したときに Slider がすべり出す（Slip 状態）
- 3) あるところまですべると接触面での動摩擦抵抗と板バネの復元力低下に伴い Slider が停止する



(a) Stick-slip 現象

(b) 安定すべり

図 2 摩擦由来の力学現象

一方で、大きなステージ速度 V や剛性の大きな板バネを用いて実験を行うと、間欠的なすべりが低減され、slip 状態が恒常的に発生する安定すべり（図 2 (b)）に転じる。機械工学分野では、stick-slip 現象は車輪の車軸などの機械要素の摩耗や構造物間の騒音などの原因になるため、いかに

に恒常的なすべり（安定すべり）を実現するかが重要とされている。

3. 摩擦を考慮した動的変形解析の概要と実験条件を再現するための計算処理

3.1 では、連続体の境界条件として摩擦を考慮した動的微小変形弾性有限要素解析の概要を述べる。本稿では、接触面での摩擦挙動を記述する摩擦構成則として著者らが考案した上下負荷面摩擦モデルを用いた定式化を説明する。3.2 では、前章で概説した stick-slip 試験を計算機上で再現するために行った計算処理について説明する。

3.1 摩擦を考慮可能な上下負荷面摩擦モデルを搭載する速度型動的微小変形弾性解析の概要

まず、本稿で使用した有限要素法に基づく摩擦を考慮した動的変形解析手法の要諦を述べる。本手法は、一般的な速度型の運動方程式で記述される固体変形解析の荷重速度境界条件と変位速度境界条件に加え、物体に接する母材の速度 $\mathbf{v}_m$ を与える接触力境界を新たに導入した手法である。（図 3）

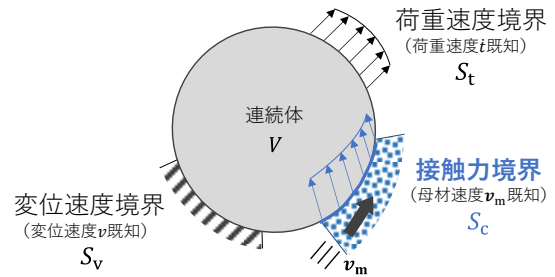


図 3 接触力境界を導入した境界条件

すなわち、弱形式化された速度型の運動方程式は次式で与えられる。

$$\int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \dot{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S_t} \dot{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_{S_c} \dot{\mathbf{f}}_c \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad (1)$$

ここに、 ρ は物体の密度、 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ は物体の応力速度テンソル、 $\dot{\mathbf{b}}$ は単位体積あたりの物体力速度、 $\dot{\mathbf{t}}$ は既知の表面力速度、 $\dot{\mathbf{f}}_c$ は接触力境界に作用する接触応力速度を表す。 $\mathbf{v}$ は物体の変位速度、 $\delta \mathbf{v}$ は仮想変位速度（ただし、変位速度境界 S_v 上で $\delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ）、 $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ は仮想ひずみ速度を表す。ここで、式(1)右辺第 3 項中の接触応力速度 $\dot{\mathbf{f}}_c$ の記述には、著者らが開発した上下負荷面摩擦モデルを適用する。同モデルの詳細な導出過程は既報²⁾を参照されたい。接触力境界面上の応力速度とすべり速度の関係は次式で記述される。

$$\{\mathbf{f}_c\} = \begin{cases} [\mathbf{C}^e] \{\dot{\mathbf{v}}^N\} + \mathbf{C}^e \{\mathbf{t}\} & \cdots \text{負荷時} \\ [\mathbf{C}^e] \{\dot{\mathbf{v}}^N\} & \cdots \text{除荷時} \end{cases} \quad (2)$$

ここに、 $[\mathbf{C}^e]$ 、 $\mathbf{C}^e$ は上下負荷面摩擦モデルに基づくマトリクス、 $\{\mathbf{t}\}$ は接触力境界面上における接単位ベクトルである。

表記法は既報²⁾に準ずる。また、接触力境界面上の節点における相対すべり速度 $\{\dot{\mathbf{v}}^N\}$ は、未知の物体変位速度 $\{\dot{\mathbf{v}}^N\}$ と既知の母材変位速度 $\{\dot{\mathbf{v}}_m^N\}$ を用いて、 $\{\dot{\mathbf{v}}^N\} = \{\dot{\mathbf{v}}^N\} - \{\dot{\mathbf{v}}_m^N\}$ と表される。したがって、弱形式化した運動方程式（式(1)）の右辺第3項の被積分項は以下のように記述される。ただし、ここでは接触力境界面上における物体の変位速度 $\{\dot{\mathbf{v}}^N\}$ と母材の変位速度 $\{\dot{\mathbf{v}}_m^N\}$ を系全体の要素の各節点の変位速度 $\{\dot{\mathbf{v}}^N\}$ と母材の変位速度 $\{\dot{\mathbf{v}}_m^N\}$ に拡張して記述する。 $[\tilde{N}]$ は有限要素法の形状関数マトリクスである。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_c \cdot \delta \mathbf{v} &= \{\delta \mathbf{v}^N\}^T \left\{ [\tilde{N}]^T \{\dot{\mathbf{f}}_c\} \right\} \\ &= \{\delta \mathbf{v}^N\}^T \left\{ \begin{aligned} &[\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}^N\} \\ &- [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} + \mathbf{C}^c [\tilde{N}]^T \{\mathbf{t}\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \text{負荷時} \\ &= \{\delta \mathbf{v}^N\}^T \left\{ \begin{aligned} &[\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}^N\} \\ &- [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \text{除荷時} \end{aligned} \quad (3)$$

$\{\delta \mathbf{v}\}$ の任意性を考慮し、アセンブリングすると、運動方程式の有限要素離散化式は次式で表現できる。

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{v}}^N\} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_c)\{\mathbf{v}^N\} = \{\dot{\mathbf{f}}^0\} + \{\dot{\mathbf{f}}^c\} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \{\dot{\mathbf{f}}^0\}$ は変位速度境界条件を考慮することで縮約された有限要素法における全体質量マトリクス、全体剛性マトリクス、全体接点荷重ベクトルである。また、上下負荷面摩擦モデルに基づくマトリクスおよび荷重ベクトルである $\mathbf{K}_c, \{\dot{\mathbf{f}}^c\}$ は次式のように表される。

$$\mathbf{K}_c = \begin{aligned} &\sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] dS \quad \dots \text{負荷時} \\ &\left(\sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] dS \quad \dots \text{除荷時} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathbf{f}}^c\} &= \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} \left\{ \begin{aligned} &-[\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} + \mathbf{C}^c [\tilde{N}]^T \{\mathbf{t}\} \end{aligned} \right\} dS \quad \dots \text{負荷時} \\ &\left(\sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} \left\{ -[\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} \right\} dS \quad \dots \text{除荷時} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $S_{c(e)}$ は要素境界毎の接触力境界、 $\Sigma_{(e)}$ はアセンブリング操作を表す。

Noda et al.⁹⁾に倣い躍度（加速度の物質時間微分）の線形性を仮定した Wilson- θ 法で式(4)を陰的に解くことで、状態更新を行った。本解析手法では、各接点に作用する接触力を、接触力境界において定義した接触応力（1次のアイソパラメトリック要素で補間）の Gauss 積分により算出している。また、接触力境界上の2点の Gauss 点上に定義している接触面の物理量（接触応力、構造の程度など）についても台形公式を用いて陰的に状態更新を行った。これにより、接触力境界面での状態（固着／すべり状態）に応じた接触力変動を考慮可能な動的変形解析を実現している。

3.2 Stick-slip 実験を動的微小変形弾性解析で行う際の計算処理

前章で概説した stick-slip 実験を平面ひずみ条件を仮定した動的微小変形弾性解析で実現するために、解析対象で

ある Slider を四角形要素（1次のアイソパラメトリック要素）で有限要素離散化するとともに、板バネを一次元バネ要素（ばね定数： k ）でモデル化した（図4）。すなわち、解析対象の物体を構成する全体節点番号に加えて、Driverを表す x 方向の自由度 $\mathbf{u}^{(ex)}$ を新たに加え、載荷点となる節点 (i) の x 方向の自由度 $\mathbf{u}_x^{(i)}$ とのバネを介した荷重伝達を考慮した。

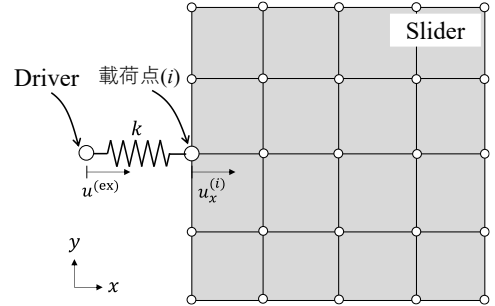


図4 Stick-slip 実験の離散モデル

以上より、Slider～Driver系（Sliderを構成する全節点自由度+Driverの x 方向自由度）の弱形式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} \{\delta \mathbf{v}^N\} \\ \delta \mathbf{v}^{(ex)} \end{Bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{v}}^N\} \\ \ddot{\mathbf{v}}^{(ex)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{K}_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}^N\} \\ \mathbf{v}^{(ex)} \end{Bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_x^{(i)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{f}}^0\} + \{\dot{\mathbf{f}}^c\} \\ \dot{\mathbf{f}}^{(ex)} \end{Bmatrix} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、実験ではステッピングモーターによりステージ（Driver）が既知の変位速度（ $\mathbf{v}^{(ex)} = \text{const.}$ ）で動くことを考慮すると、式(7)は縮約することができるため、結局、空間離散化した方程式の自由度は元の離散化式(4)と同じになる。したがって、離散化式は次式となる。

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{v}}^N\} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_s)\{\mathbf{v}^N\} = \{\dot{\mathbf{f}}^0\} + \{\dot{\mathbf{f}}^c\} + k\{\mathbf{v}^{(ex)}\} \quad (8)$$

ここに、 $\mathbf{K}_s$ は載荷点となる節点 (i) の x 方向に自由度に対応する対角成分にのみばね定数 k を持つ拡大係数マトリクスである。右辺第3項の $\{\mathbf{v}^{(ex)}\}$ は同自由度部分にのみ成分を持つベクトルである。本式を前節同様に、躍度の線形性を仮定した Wilson- θ 法で陰的に状態更新を行った。

4. Stick-slip 実験における板バネの載荷点位置が接触力分布に与える影響

本章では、板バネを介した Slider の荷重載荷点位置を上に変化させ、載荷点位置が接触力分布に及ぼす影響を評価した。本稿では、Ozaki et al.³⁾の実験に倣い解析条件を設定した。また、初期値境界値問題としての効果を議論するため、既報²⁾で行った図5に示すバネ～質点系モデルによる質点動力学計算（初期値問題）の結果も併記する。

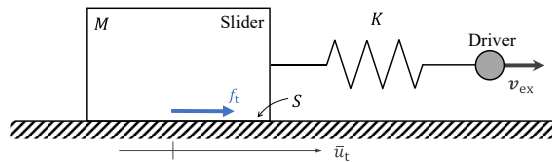


図 5 バネ～質点系モデル

4.1 解析条件

解析メッシュは、図 6 に示すように Bristol board を 1 mm×2 mm の長方形メッシュ、その上のジュラルミンを 2 mm×2 mm の正方形メッシュでそれぞれ分割した計 350 要素で構成される。また、4 種類の Slider の質量に対して stick-slip 実験を実施した Ozaki et al.³⁾の実験のうち質量が 3.5 kg の実験条件を検討対象と設定した。それに伴い、3.5 kg の質量に相当する法線応力が接触面にかかるように Slider 上部に等分布荷重を作用させている。解析に使用した接触面の物性値、発展則パラメータ、外力条件、初期条件は Ozaki et al.³⁾を参考に表 1 の通り設定した。ただし、本稿では単純化のため、摩擦係数は変化しない安定すべりを呈するパラメータの組を設定した。Slider (ジュラルミン・Bristol board) の弾性体パラメータは表 2 に示す通りであるが、機械設計便覧⁷⁾および既往研究⁸⁾⁹⁾を参考にしており、Bristol board の密度は、Slider の質量が 300 g になるようにジュラルミンの密度、体積、Bristol board の体積から逆算している。本章で検討した板バネの載荷位置については、表 3 に示すように載荷点がジュラルミンとなる 4 ケースを考えた。

表 1 各種パラメータおよび初期条件

接触面の物性値	
静止摩擦係数 μ_s	0.16
動摩擦係数 μ_k	0.12
接線方向のペナルティ係数 α_t (N/mm ³)	1000
法線方向のペナルティ係数 α_n (N/mm ³)	1000
発展則パラメータ	
正規圧密度化指数 r (mm ⁻¹)	100
構造喪失速度を規定する材料定数 κ (mm ⁻¹)	0.0
構造喪失速度を規定する材料定数 m	-
構造回復速度を規定する材料定数 ξ (s ⁻¹)	0.0
構造回復速度を規定する材料定数 n	-
外力条件	
バネ定数 K (N/mm)	6.87
ドライバの接線方向速度 v_{ext} (mm/s)	0.04
初期条件	
初期の構造の程度 $1/R_0^s (= \mu_s/\mu_k)$	1.33
初期法線応力 f_{n0} (N/mm ²)	3.43×10^{-3}
初期接線応力 f_{t0} (N/mm ²)	1.0×10^{-7}

表 2 弾性体パラメータ

材料	弾性係数 E (GPa)	ポアソン比 ν	密度 ρ (g/cm ³)
ジュラルミン	74.48	0.33	2.79
Bristol board	4.90	0.18	1.05

表 3 解析ケース

ケース	底面からの高さ (mm)
1	4.0
2	6.0
3	8.0
4	10.0

4.2 解析結果と考察

質点動力学計算により求めた摩擦力和動的変形解析における各ケースでの接触力境界上に働く接触力 (Gauss 点に定義した接触応力の面積分値) の合力を図 7 に示す。また、上記の接触力境界上の接触力を接触断面で除した法線応力および接線応力の時刻歴のコンターを図 8, 図 9 に示す。図 7 の結果を見ると、すべてのケースにおいて質点動力学計算で得られる摩擦力和接触面の摩擦力の合力は同様の傾向を示しており、安定すべりを呈する本実験条件において初期値問題としての解と初期値境界値問題としての解には大きな差はないことが分かる。一方、図 8 より接触面の法線応力分布は載荷に伴って非一様化しており、載荷点付近の接触面に働く法線応力は減少し、逆に載荷点から離れた接触面に働く法線応力は上昇している。特に、載荷点が一番高いケース 4 では、その非一様化が顕著である。以上のような非一様化は、Slider に板バネの復元力に由来する時計回りのモーメントが作用することで生じる。つまり、載荷側の接触面では物体が母材から離れようとして法線応力が減少するのに対し、載荷点から離れた位置の接触面では、物体が床にめり込もうとして法線応力が増加する。この法線応力変動により、それぞれの面で持つことのできる摩擦力が変化することで、図 9 の(c),(d)のように接線応力分布においても非一様化が生じる。以上を踏まえると、Ozaki et al.³⁾が行った実験は、今回の安定すべり条件下では初期値問題と初期値境界値問題で系全体のすべり挙動に大差はないものの、板バネを高い位置から載荷することで接触力分布が非一様化することが明らかとなった。このことから、図 1 に示す plate-on-plate 型の試験機で摩擦試験を行う上では、板バネの載荷点は可能な限り低い位置に設定することで、境界値問題としての効果を抑制し、系の応答を初期値問題あるいは構成式応答として捉えることが可能になるといえる。

5. 板バネの振動現象に関する考察

Plate-on-plate 型の stick-slip 試験において、図 10 に示すように Driver 速度が大きい場合などに、実験中に板バネの振動が観測されている。固体と粒状体の摩擦実験を行った Nasuno et al.¹⁰⁾においても同様の現象が確認されているが、Nasuno et al.¹⁰⁾は摩擦係数 μ を板バネの復元力 F_t を用いて $\mu = F_t/Mg$ としている。前述のとおり、摩擦モデルの妥当性検証では、摩擦実験に潜む初期値境界値問題としての効果を理解することは重要であり、仮に板バネの振動現象を接触面での stick-slip 現象と見誤ると、接触面に働く摩擦力

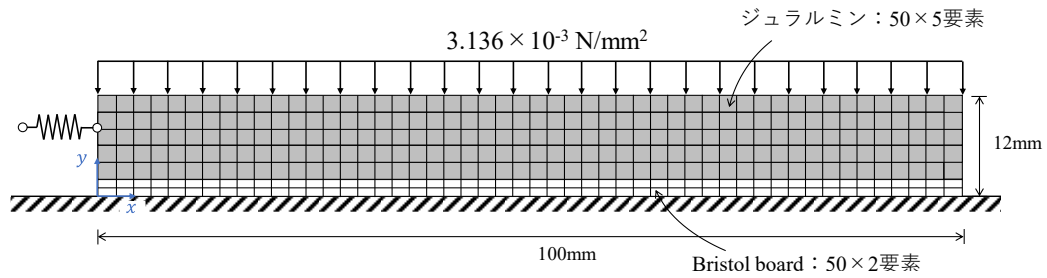


図 6 解析メッシュおよび境界条件

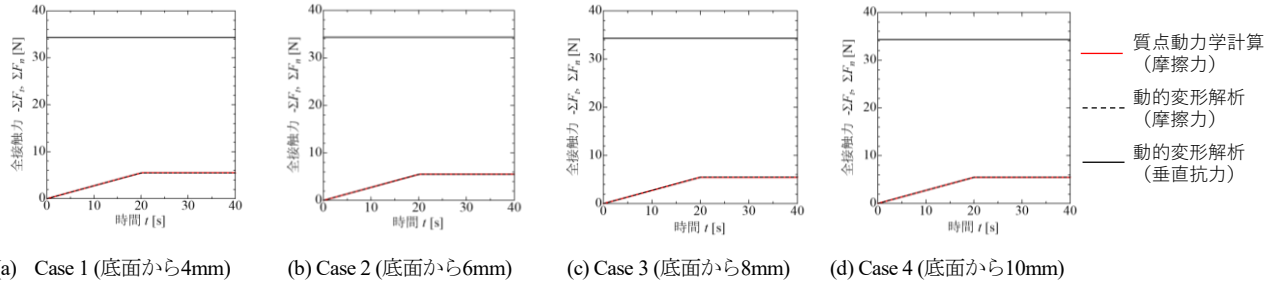


図 7 質点動力学計算による摩擦力と動的変形解析における接触面における全接触力

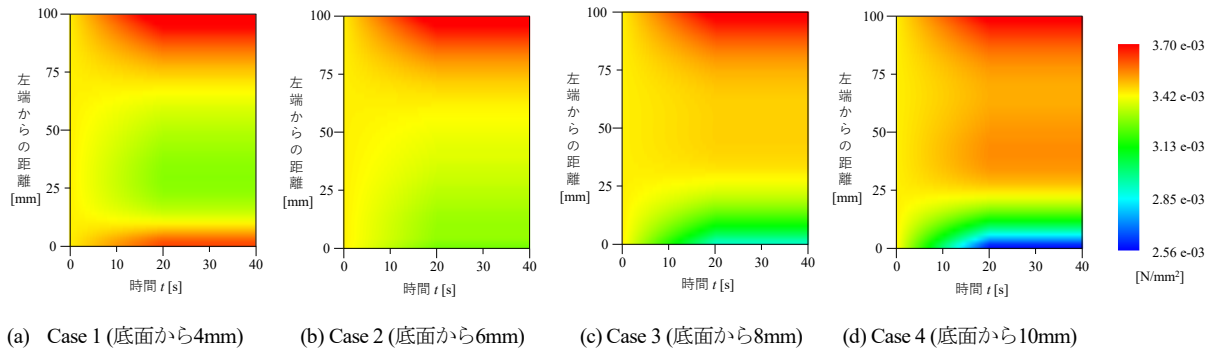


図 8 接触力境界における法線応力分布の時刻

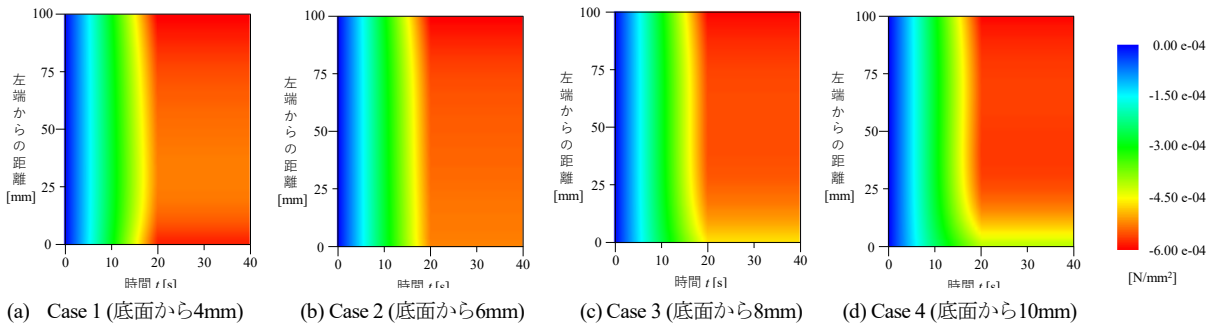


図 9 接触力境界における接線応力分布の時刻歴

を不適切に評価することに繋がってしまう。そこで、本章では大きな Driver 速度の条件で摩擦実験の再現解析を行い、板バネの復元力から摩擦力を推定する際に慣性力を考慮することの重要性を指摘する。

5.1 解析条件

解析条件は前章にて、モーメントによる接触応力変動を抑えることのできるケース 1 に対して、表 4 に示す 3 種類の Driver 速度を用いて解析を実施した。つまり、一度滑り始めると、接触面に働く摩擦力は一定となる条件での解析となっている。

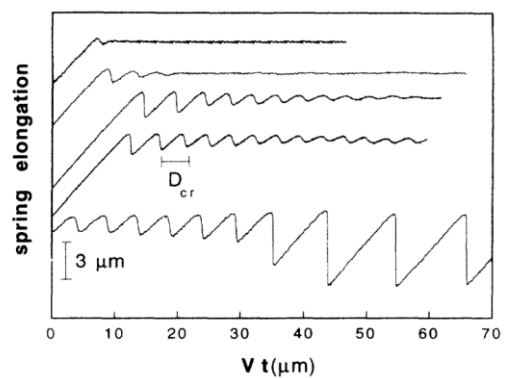


図 10 バネの伸び量の振動現象 (Heslot et al.¹⁾ より)

表 4 解析条件

ケース	Driver 速度 (mm/s)
5	0.04
6	0.40
7	4.00

5.2 解析結果および理論解との比較

表 4 に示した 3 ケースのバネの復元力と接触面に働く摩擦力の合力の時刻歴を図 11 に示す。ここで、Driver 速度の増加に伴いすべり出す時刻が変化していることに留意されたい。これを見ると、速度が一番大きなケース 7 において、確かにバネの振動現象が確認される。一方、摩擦係数を一定とすることで安定すべりを生じる本解析条件において、接触面に働く摩擦力はすべり状態に遷移後に一定となっている。この振動現象は、一度滑り出したのちに物体が定応力下で完全に止まることなく加減速を繰り返して発生するものであり、物体の慣性に起因して発生する現象である。したがって、板バネの復元力 F_f を接触力と見做して、物体の荷重 Mg で除したものをそのまま摩擦係数として評価してしまうと、適切に現象を捉えることができない。

またここでは、今回扱った系の理論解を導出し、振動現象のその他の要因を探ることとする。今回扱った系は図 5 に示すバネ～質点系モデルと同じ運動方程式で記述されている。すなわち、

$$M\ddot{u}_t = K(v_{\text{ext}}t - \bar{u}_t) + f_t S \quad (9)$$

ここで、 $t = t_0 = f_t S / K v_{\text{ext}}$ に $\bar{u}_t = 0, \dot{\bar{u}}_t = 0$ であった物体がすべり状態となり、一定の摩擦力 $f_t S = -\mu Mg (= \text{const.})$ が作用していると仮定すると式(9)の運動方程式の解は次式となる。

$$\bar{u}_t = -\frac{v_{\text{ext}}}{\omega} \sin\{\omega(t - t_0)\} + v_{\text{ext}}t - \frac{\mu Mg}{K} \quad (10)$$

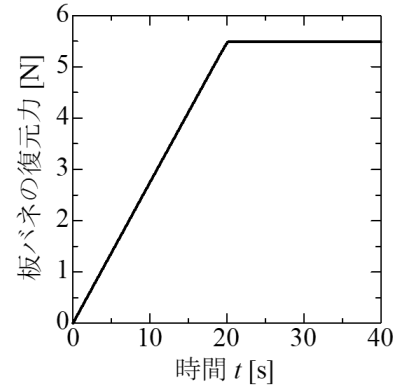
ここに、 $\omega = \sqrt{K/M}$ である。したがって、バネの復元力 F_f は次式となる。

$$F_f = K(v_{\text{ext}}t - \bar{u}_t) = \mu Mg + \frac{K v_{\text{ext}}}{\omega} \sin\{\omega(t - t_0)\} \quad (11)$$

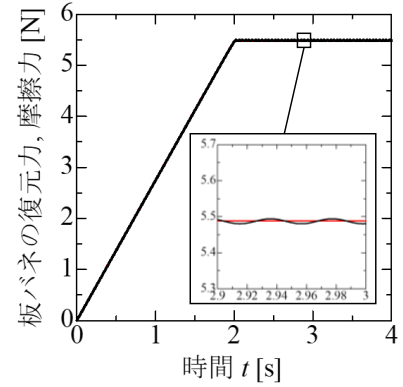
以上から、本章で議論していた板バネの振動現象の振幅は $K v_{\text{ext}} / \omega = v_{\text{ext}} \sqrt{MK}$ であり、周期は $2\pi \sqrt{M/K}$ であることが分かる。Driver 速度を変えて解析を行った解析結果である図 11 の(b),(c)を見ると振幅が 10 倍になっているが、その周期は変わらないことが見て取れる。慣性による板バネの振動現象の振幅が増大する要因は Driver 速度、質量、バネ剛性であり、特に振幅に比例する Driver 速度はその他の要因よりも振動現象を助長することが明らかとなった。

以上より、物体の慣性力に由来する板バネの振動現象の主な要因は大きな Driver 速度にあり、その振動現象の効果を抑えて板バネを介した構成式応答を照査するためには、バネの復元力に加えて変位計により記録された物体の運動 $x = x(t)$ から推定される慣性力 $M\ddot{x}$ を加味して摩擦力を推定する必要があることが改めて確認された。

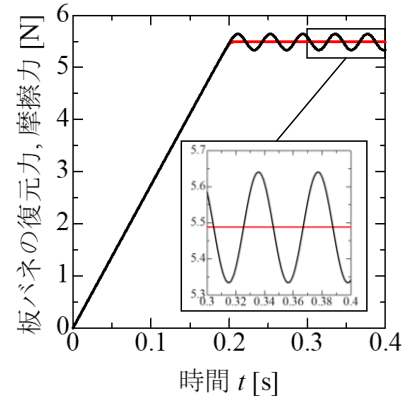
— 摩擦力 — 板バネの復元力



(a) ケース 5



(b) ケース 6



(c) ケース 7

図 11 バネの復元力と摩擦力の時刻歴

6. まとめと今後の展望

本稿では、上下負荷面摩擦モデルを搭載する動的微小変形弾性解析を拡張した解析手法を用いて、摩擦モデルの妥当性検証に用いられている plate-on-plate 型 stick-slip 実験の「初期値境界値問題」としての効果を数値的に検討した。まず、板バネの載荷位置が接触応力分布に及ぼす影響について検証したところ、たとえ摩擦係数一定で安定すべりを呈する定常的な条件であっても、物体の載荷位置によって、接触面の法線応力分布が非一様化することが分かった。したがって、板バネの載荷位置を可能な限りに低い位置に設定することで境界値問題として、効果を抑制することがで

き、接触面全体での接触応力～すべり速度関係の時刻歴を要素挙動と見做せることが明らかとなった。また、stick-slip 実験において、接触面に働く摩擦力を板バネの復元力で代替する実験方法をとると、Driver 速度が大きい条件などで板バネが振動し、安定すべり現象を stick-slip 現象と見誤る可能性があることを確認した。したがって、板バネの復元力に加えて慣性力を考慮して接触面での摩擦力を同定する必要性が示唆された。今後は、より詳細に stick-slip 試験が持つ初期値境界値問題が持つ効果を検証するため、物体の幾何形状が接触応力分布にもたらす効果や stick-slip 現象を呈する解析条件での検証に取り組む予定である。また、本稿で取り上げた Heslot et al.¹⁾と同様の stick-slip 試験機を導入し、上記で得られた知見を踏まえつつ、上下負荷面摩擦モデルの表現能力の Validation を行う。さらに、実験を通じて上下負荷面摩擦モデルの各種パラメータの持つ物理的特性を把握することで、固体同士の摩擦現象から地盤材料などの粒状体と固体同士の摩擦現象までも表現可能な摩擦モデルへ改良することを見込んでいる。

謝辞

本研究の実施にあたり、科学研究費補助金（基盤研究(B): 課題番号 22H01586）の助成および JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2125（東海国立大学機構メイク・ニュー・スタンダード次世代研究事業）の財政支援を受けた。

参考文献

- 1) Heslot, F., Baumberger, T., Perrin, B.: Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics: Experiments and a heuristic model, *Physical Review E*, Vol.49, No.6, pp. 4973-4988, 1994.
- 2) Toyoda, T., Yasuike, R., Noda, T.: Super/sub-loading surface model for constitutive equation of friction, *Tribology International*, Vol. 191, 109080, 2024.
- 3) Ozaki, S., Ito, C., Hashiguchi, K.: Experimental verification of rate-dependent elastoplastic analogy friction model and its application to FE analysis, *Tribology International*, Vol. 64, pp. 164-177, 2013.
- 4) Asaoka, A., Nakano, M., Noda, T.: Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior, *Soils and Foundations*, Vol.40, No.2, pp. 99-110, 2000.
- 5) 安池亮, 豊田智大, 野田利弘: 上下負荷面摩擦モデルによる stick-slip 現象および非一様なすべり伝播過程の数値解析, 第36回中部地盤工学シンポジウム論文集, pp. 87-94, 2024.
- 6) Noda, T., Asaoka, A., Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.48, No.6, pp. 771-790, 2008.
- 7) 村田誠四郎: 機械設計便覧, 丸善, No.10, p. 1322, 2002.
- 8) 寺本徳郎, 倉嶋寛貴, 塚本雅敏: A2017-T4の破壊靱性のひずみ速度依存性, *圧力技術*, Vol.42, No.5, pp. 261-268, 2004.
- 9) 木村実, 中尾哲也, 加藤護: 引張試験からの紙のヤング率の実験的算出法, *紙・技協誌*, Vol.39, No.11, pp. 1057-1062, 1985.
- 10) Nasuno, S., Kudrolli, A., Bak, A., Gollub, J.: Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers, *Physical Review E*, Vol.58, No.2, pp. 2161-2171, 1998.