

上界定理に基づく擁壁主働土圧の剛塑性有限要素解析
Rigid Plastic Finite Element Analysis for Active Earth Pressure
based on the Upper Bound Theorem

水野和憲¹，南波典李²，大塚悟³

- 1 岐阜工業高等専門学校・環境都市工学科・E-mail address kazu@gifu-nct.ac.jp
- 2 岐阜工業高等専門学校専攻科・先端融合開発専攻
- 3 長岡技術科学大学・工学研究院環境社会基盤系

概 要

従来、抗土圧擁壁の設計には Coulomb 土圧論に基づく土圧算定手法が多く利用されているが、上界定理に基づく極限解析による主働土圧算定はほとんど適用例がない。筆者らは上界定理に基づく剛塑性有限要素法 (Rigid Plastic Finite Element Method, 以下、RPFEM と呼ぶ) を用いた主働土圧算定手法を開発している。RPFEM は Coulomb 土圧論のように破壊形式の仮定やすべり線を直線に限定する必要はなく、境界値問題に応じた破壊形態を合理的に決定できる特徴がある。本論文では、仮想壁に作用する主働土圧を極限解析の枠組みで合理的に評価する方法を提案する。擁壁摩擦のモデル化についても言及し、典型的な背面地盤の主働土圧算定を実施した。既往手法である Coulomb 土圧論との比較により本算定手法の妥当性を示す。最後に、地震時主働土圧を算定する事例解析も紹介する。

キーワード： 擁壁，主働土圧，極限解析，上界定理，剛塑性有限要素法

1. はじめに

擁壁など土留め構造物の設計は裏込め土や背面地盤の土圧に基づいて行われる。土圧の算定には、従来、剛な仮想壁を導入して作用荷重を算出する方法が用いられる。Coulomb(1773)¹⁾は剛な仮想壁と直線すべりの間にある土楔を予め仮定して運動(滑動)方向を規定することにより、主働・受働土圧を算出した。Coulomb 土圧論は極限解析の原型としてとらえられることが多いが、一方で、極限定理にある上界定理から土圧問題を捉えると、受働土圧は仮想壁を介して土楔に作用する荷重(未知数)と変位速度(運動)がなす外力仕事率は正となるが、主働土圧に対しては荷重と変位速度が逆方向になるために仕事率は負になる問題が生じて、極限解析を適用するには注意が必要となる。擁壁の設計において主働土圧の評価は大変重要であるが、上記の理由により、極限解析による主働土圧算定はこれまであまり実績がない。

この問題に対して、筆者ら²⁾は仮想壁に作用する主働及び受働土圧を極限解析の枠組みで合理的に評価する方法を提案してきた。具体的には、地盤に作用する外力荷重系として、仮想壁に作用する表面力 T に地盤全体の物体力 X を加えた荷重系 (X, T) を基準荷重とすることにより、主働および受働の破壊形態によらずに外力仕事率が正になることに着目し、主働および受働土圧を1つのスキームで算

定することを示してきた。さらに前田ら³⁾は、地盤に物体力 X としての自重を一定載荷させた上で、仮想壁を介して地盤に作用する表面力 T のみを基準荷重とし、荷重係数(荷重強度) ρ を未知数とした場合の極限解析を実施している。この基準荷重 T が ρ 倍された時に塑性崩壊となる極限状態(主働もしくは受働状態)であるとし、この ρT を主働土圧合力(もしくは受働土圧合力)と定義した。この方法により、典型的な背面地盤で主働及び受働状態の土圧が適切に算定できることを示しているが、土圧合力の作用点と壁面摩擦の状況に応じた土圧作用方向については、詳細に検討されていない。実際には仮想壁との相互作用によって荷重分布が決定されるために、Coulomb 土圧のように土圧作用点が壁面の1/3高さになる⁴⁾とは限らない。特に地震時における擁壁背面地盤から仮想壁への土圧分布およびその合力の作用点は平常時とは異なるため、実際現象と乖離することが予想される。また各種設計基準^{4),5)}では壁面摩擦を与件としているが、土圧作用方向は破壊形態と関連する⁶⁾ために、与件とする合理性は明らかになっていない。

そこで本研究では、土圧合力の作用点や作用方向の合理的な求め方の確立を目的として、上界定理に基づく極限解析により、仮想壁に作用させる荷重の載荷条件や壁面摩擦を考慮した主働土圧算定を実施し、土圧合力の作用点や作用方向について検討を行った。

上界定理に基づく極限解析には前田らと同様に剛塑性

有限要素法⁷⁾ (Rigid Plastic Finite Element Method, 以後, RPFEM と呼ぶ) を用いた。RPFEM による解析は, 連続体理論に基づくために, すべり線のような不連続線を取り扱うことができないが, Coulomb 土圧の直線すべりのように破壊形式を規定する必要はなく, 境界値問題に応じた破壊形態を合理的に決定できる特徴がある。そして PRFEM により得られた主働土圧については, 同計算条件で得られる Coulomb 土圧と比較し, 提案する算定手法の妥当性を確認した。

2. 極限解析による主働土圧算定法

2.1 地盤材料の剛塑性構成式

Tamura et al.⁷⁾ は, 極限解析の上界定理に基づく考察から, Drucker-Prager 型の降伏関数を用いた剛塑性構成式を以下のように誘導している。降伏関数を応力テンソル σ の第一不変量 $I_1=\text{tr}(\sigma)$, 偏差応力テンソル S の第二不変量 $J_2=S:S/2$ を用いて次式のように表すことにする。ここに, ω, ψ は Mohr-Coulomb の破壊規準に基づく c, ϕ と関係付けられる係数であり, 平面ひずみ条件では式(2)となる。また引張応力を正と定義した。

$$f(\sigma) = \omega I_1 + \sqrt{J_2} - \psi = 0 \quad (1)$$

$$\omega = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad \psi = \frac{3}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \cdot c \quad (2)$$

塑性変形を生じる物体の応力 σ を, 塑性ひずみ速度から求められる決定応力 $\sigma^{(1)}$ と塑性ひずみ速度から求められない非決定応力 $\sigma^{(2)}$ に分解する(図1)。決定応力 $\sigma^{(1)}$ は関連流れ則により以下のように表される。式中の $\dot{\epsilon}^p$ は塑性ひずみ速度, $\dot{\epsilon}$ は等価塑性ひずみ速度である。

$$\sigma^{(1)} = \frac{\psi}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\epsilon}}, \quad \dot{\epsilon} = \sqrt{\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \quad (3)$$

非決定応力 $\sigma^{(2)}$ は降伏関数式(1)の直線部分に沿う応力成分であり, その大きさは塑性ひずみ速度に対して不定である。しかし, 降伏曲面上に応力があることを利用して非決定応力の成分(不定応力)を以下のように表すことができる。降伏関数式(1)に関連流れ則を適用すると, 塑性ひずみ速度の条件式(体積変化特性)が求められる。

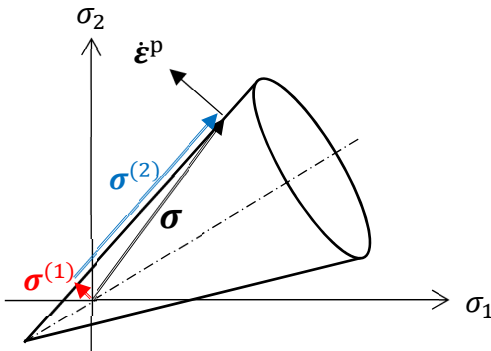


図1 Drucker-Prager 型降伏曲面と応力の分解

$$h(\dot{\epsilon}^p) = \dot{\epsilon}_v^p - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_v^p - \beta \dot{\epsilon} = 0 \quad (4)$$

ここに $\dot{\epsilon}_v^p$ は塑性体積ひずみ速度である。式(4)は式(1)で表される降伏曲面の現応力点における外向き法線方向の塑性ひずみ速度に関する条件式であることを利用すると, $\sigma^{(2)}$ は不定定数 α を用いて次式のように表される。

$$\sigma^{(2)} = \alpha \frac{\partial h}{\partial \dot{\epsilon}^p} = \alpha \left\{ I - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\epsilon}} \right\} \quad (5)$$

I は単位テンソルを表す。式(3), 式(5)より Drucker-Prager 型の降伏関数に対する剛塑性構成式は次式で示される。

$$\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = \frac{\psi - 3\omega\alpha}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\epsilon}} + \alpha I \quad (6)$$

この構成式は不定定数 α を含んでおり, 式(4)の制約条件とともに境界値問題の解析を実施することにより, 不定定数 α を定めることができる。本論文では解析の高速化を目的に制約条件式(4)をペナルティ法によって陽に取り組む方法を用いる(κ : ペナルティ定数)。以上から剛塑性構成式は最終的に次式で与えられる^{8),9)}。

$$\sigma = \frac{\psi}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\epsilon}} + \kappa (\dot{\epsilon}_v^p - \beta \dot{\epsilon}) \left\{ I - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\epsilon}} \right\} \quad (7)$$

2.2 表面力を基準荷重とした土圧算定手法

極限解析によって荷重係数(荷重強度) ρ を求めるには, 運動学的可容な変位速度場 \dot{u} を仮定し, 外力仕事率と内部消散率を等しいとする次式の上界計算式を用いる⁷⁾。

$$\rho \left(\int_{S_\sigma} T \cdot \dot{u} dS \right) + \int_V X \cdot \dot{u} dV = \int_V \sigma : \dot{\epsilon}^p dV \quad (8)$$

ここに, X は物体力を, T は表面力を表す。内部消散率は $D(\dot{\epsilon}^p) = \sigma : \dot{\epsilon}^p$ である。内部消散率を計算するために, 地盤材料の降伏関数には式(1)を用いる。

本論文の土圧算定では, 文献3)と同様に, 仮想擁壁を介して地盤に作用させる表面力 T を基準荷重とし, この基準荷重 T が ρ 倍された時に極限状態(主働もしくは受働状態)であるととし, この ρT を主働土圧合力(もしくは受働土圧合力)と定義した。この荷重 T の载荷位置や载荷方向は自由に設定できる。この荷重 T を, 仮想擁壁を介して地盤に押し込む向き(この向きを正とする, $T > 0$)に载荷すれば受働状態となり, 仮想擁壁を介して地盤から引き離す向き(この向きは負となる, $T < 0$)に载荷すれば主働状態となる。これにより基準荷重 T がなす外力仕事率は常に正となり, RPFEM を用いても, 仕事率が正になる変位速度場 \dot{u} を探ることができ土圧算定が可能となる。崩壊形態に対する制約がないので Coulomb 土圧よりも合理的に算定が可能である。また物体力 X は自重だけでなく, 震度法に基づき水平方向の慣性力を与えることで地震時における動土圧を算定することが可能となる。

本論文の土圧算定では、式(7)の剛塑性構成式を力のつり合い式(弱形式)に代入して実施する。若干の展開を行うと次式になる。

$$\int_V \left\{ \frac{\psi - 3\omega\kappa(\dot{\epsilon}_v^p - \beta\dot{\epsilon})}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\epsilon}} \right\} : \delta\dot{\epsilon}^p dV + \int_V \kappa(\dot{\epsilon}_v^p - \beta\dot{\epsilon}) I : \delta\dot{\epsilon}^p dV$$

$$= \int_V \mathbf{X} \cdot \delta\dot{\mathbf{u}} dV + \rho \left(\int_{S_\sigma} \mathbf{T} \cdot \delta\dot{\mathbf{u}} dS \right) \quad \forall \delta\dot{\mathbf{u}} \quad (9)$$

剛塑性構成式は変位速度の大きさが不定のために、以下の制約条件とともに計算すると荷重係数 ρ が求められる。

$$\int_{S_\sigma} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS = 1 \quad (10)$$

ペナルティ法 (μ : ペナルティ定数) を用いて制約条件式(10)を式(9)に陽に取り込み、汎関数の停留条件から次式の支配方程式を得る。

$$\int_V \left\{ \frac{\psi - 3\omega\kappa(\dot{\epsilon}_v^p - \beta\dot{\epsilon})}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}} \frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\epsilon}} \right\} : \delta\dot{\epsilon}^p dV + \int_V \kappa(\dot{\epsilon}_v^p - \beta\dot{\epsilon}) I : \delta\dot{\epsilon}^p dV$$

$$= \int_V \mathbf{X} \cdot \delta\dot{\mathbf{u}} dV + \mu \left(\int_{S_\sigma} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS - 1 \right) \left(\int_{S_\sigma} \mathbf{T} \cdot \delta\dot{\mathbf{u}} dS \right) \quad \forall \delta\dot{\mathbf{u}} \quad (11)$$

式(11)を有限要素法による空間離散化すると変位速度 $\dot{\mathbf{u}}$ が求まり、次式から荷重係数 ρ が得られる。この荷重係数が極限状態における仮想壁に作用する土圧合力 $\rho\mathbf{T}$ を与えることになる。

$$\rho = \mu \left(\int_{S_\sigma} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS - 1 \right) \quad (12)$$

3. 擁壁と壁面摩擦のモデル化と主働土圧算定

3.1 擁壁と壁面摩擦のモデル化

ここでは簡単のため、地表面傾斜角 $\beta=0^\circ$ の背面地盤が、高さ $H=6\text{m}$ 、擁壁背面角 $\alpha=0^\circ$ の仮想擁壁に及ぼす典型的な主働土圧問題を取り上げる。RPFEM で用いる有限要素メッシュ及び境界条件を図2に示す。計算は2次元平面ひずみ条件とした。背面地盤は均一な砂質地盤を想定し、表1に示す土質パラメータを用いる。なお、本計算は関連流れ則に基づくため、粘着力 $c=0\text{kN/m}^2$ では内部消散率が $D=0$ となり計算不可となる。よって、ここでは小さい値として $c=1\text{kN/m}^2$ を与えた。

本解析で扱う擁壁は実体はなく、土に比べ極めて剛性の高い材料が背面地盤の壁面に接している仮想擁壁としてモデル化し、具体的には表1に併記した値を用いて梁(ビーム)要素でモデル化した。なお、この値を小さく設定することで矢板などのたわみ性を有する土留め壁をモデル化することも可能である。また仮想擁壁の下端では、

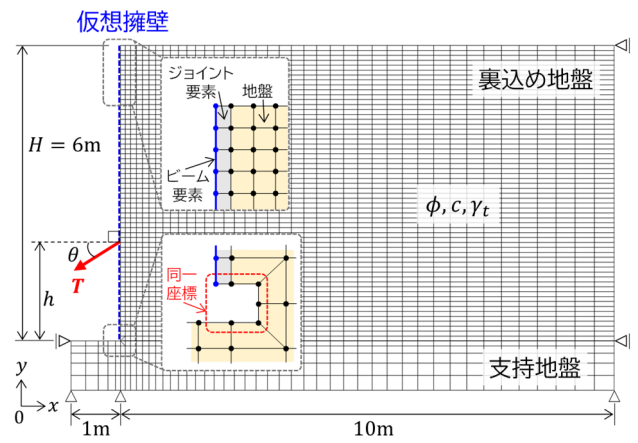


図2 解析対象と有限要素メッシュ

表1 背面地盤および仮想擁壁の材料パラメータ

背面地盤の土質パラメータ (プレート要素)	
せん断抵抗角 ϕ [°]	30,35,40
粘着力 c [kN/m ²]	1 ($\cong 0$)
単位体積重量 γ_t [kN/m ³]	18
仮想擁壁の材料パラメータ (ビーム要素)	
軸降伏応力 N [kN/m ²]	10000
降伏曲げモーメント M [kN·m]	10000
接触ジョイントの材料パラメータ (ジョイント要素)	
せん断抵抗角 ϕ_s [°]	0
粘着力 c_s [kN/m ²]	10000

図2中の下方の拡大図に示すように、擁壁が下部の支持地盤の影響を受けないように切り離れた。さらに擁壁下端部は変位速度が不連続となるため、沖見ら¹⁰⁾による同一座標で自由度の異なる節点をもつ四角形要素にメッシュ分割する特異点処理を施した。

また擁壁と背面地盤の接触面では十分に粗な状態となる壁面摩擦を考慮するため、図2中の上方の拡大図に示すように、両者の接触面のインターフェイス要素としてジョイント要素を用いてモデル化し、その材料パラメータには表1に併記したように十分に大きな値を設定した。

以上のような仮想擁壁および壁面摩擦のモデル化により背面地盤を主働状態にするには、この仮想擁壁を介して下端から h の位置で擁壁を地盤から引き離す向きに基準荷重 \mathbf{T} を作用させることで実現させる。受働状態では擁壁を介して地盤を押し向きに基準荷重 \mathbf{T} を作用させる。RPFEMによる上界計算を実施することで極限荷重 $\rho\mathbf{T}$ が求まり、その大きさが主働土圧合力 ($\|\rho\mathbf{T}\|=P_a$) となる。同時に破壊形態も計算結果として求められる。

上述した基準荷重 \mathbf{T} の作用条件として、本論文では、作用位置 h については擁壁高さ H の下端から1/3高さ付近の $h=1.5\sim 2.5\text{m}$ までを0.1mピッチで設定した(計11ケース)。また作用方向 θ (擁壁法線方向から反時計回りを正)については水平方向 $\theta=0^\circ$ から背面地盤のせん断抵抗角 ϕ までの角度を 5° ピッチで設定した($\phi=30^\circ$ の場合なら、計7ケース)。

3.2 典型的な背面地盤での主働土圧算定

(1) 極限荷重

RPFEM を適用して主働土圧を算定した結果、未知数である荷重係数 ρ は負の値が得られた。つまり極限荷重 ρT の符号は正 ($\rho < 0 \times T < 0 = \rho T > 0$) となり、擁壁側から背面地盤に作用する向きで算出された。土塊自重による仕事が卓越する場合には、擁壁を引き離さなくても背面地盤は崩壊することが示された。つまり崩壊する土塊を擁壁側から支える崩壊モードであることがわかった。

せん断抵抗角 $\phi=30^\circ$ の背面地盤における全77ケースの境界値問題を解いて得られた極限荷重 ρT の大きさ $\|\rho T\|$ を表2に示す。なお、各作用方向 θ において $\|\rho T\|$ の最小値に色付けた。また全77ケース中の最小値は、作用位置 $h=1.9\text{m}$ 、作用方向 $\theta=20^\circ$ の時であった。

表2中の色付けた極限荷重 $\|\rho T\|$ と作用方向 θ の関係を図3に示す(赤色の四角印)。また同図には背面地盤のせん断抵抗角 $\phi=35^\circ, 40^\circ$ の結果についても併記した。図3より、本計算条件下においてはすべて $\theta=20^\circ$ の時に最小値となり、地盤のせん断抵抗角 ϕ と $\theta=1/2\phi \sim 2/3\phi$ の関係であることがわかった。この関係は各種設計基準^{4),5)}で設定されている壁面摩擦角 δ と同等である。

表2 各作用位置、作用方向における極限荷重 $\|\rho T\|$ [kN/m]

作用位置 h [m]	作用方向 θ [°]						
	0	5	10	15	20	25	30
2.5	99.5	95.9	93.5	92.3	91.9	92.5	94.2
2.4	98.7	95.1	92.7	91.4	91.0	91.5	93.1
2.3	98.2	94.4	92.0	90.6	90.2	90.6	92.2
2.2	97.9	94.0	91.4	89.9	89.5	89.9	91.4
2.1	97.6	93.6	91.0	89.4	88.8	89.3	90.8
2.0	97.2	93.4	90.7	89.0	88.3	88.7	90.3
1.9	97.3	93.2	90.5	88.8	88.2	88.4	90.1
1.8	97.7	93.6	90.9	89.2	88.8	90.4	94.1
1.7	98.8	94.9	92.5	91.8	92.8	95.9	99.9
1.6	100.7	97.3	95.9	96.3	98.3	101.7	106.3
1.5	103.7	101.3	101.2	102.4	104.9	108.7	113.7

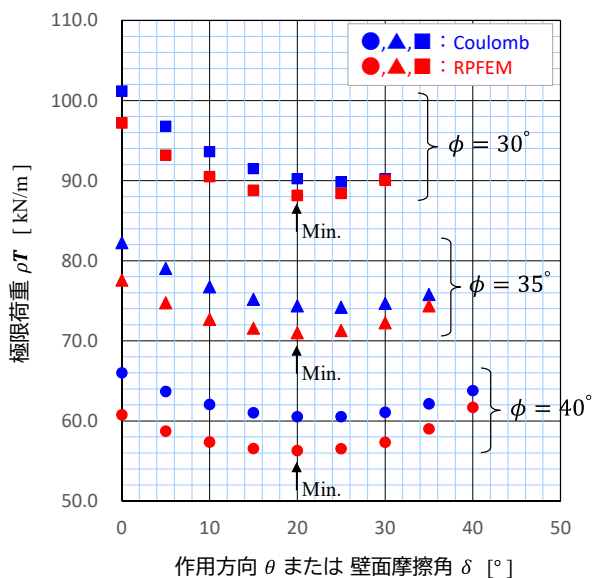


図3 最小となる極限荷重 ρT と作用方向 θ の関係

また、図3には横軸を壁面摩擦角 δ として Coulomb 土圧論による同計算条件の主働土圧合力 P_a (青色)を併記した。ただし、背面地盤の粘着力は $c=1\text{kN/m}^2$ として計算した。これらより両者はほぼ同程度の値と傾向が得られ、本論文でモデル化した荷重 T の作用方向 θ が Coulomb 土圧論で用いる壁面摩擦角 δ と等価であることが明らかとなった。

以上より、RPFEM による壁面摩擦を考慮した主働土圧算定手法は妥当であることが明らかとなった。

(2) 破壊形態

次に、表2中の作用方向 $\theta=0^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ における作用位置 h が最も低い $h=1.5\text{m}$ 、極限荷重が最小値を示す $h=1.9\sim 2.0\text{m}$ 、作用位置 h が最も高い $h=2.5\text{m}$ の計9ケースの載荷境界条件における破壊形態(等価ひずみ速度分布図および変位速度場)を図4に示す。図中の(d)および(e)には Coulomb 土圧論より得られる直線すべり線((d)は $\delta=0^\circ$ の時、(e)は $\delta=20^\circ$ の時)とその角度も併記した。

RPFEM による解析は、連続体理論に基づくためにすべり線のような不連続線を取り扱うことができないが、(d)図および(e)図をみると等価ひずみ速度が顕著に発生している帯状の領域と Coulomb 土圧のすべり線が概ね一致することがわかる。また(d)図はほぼ直線状の領域だが、(e)図の帯状の領域を詳細にみると、わずかではあるが下部は曲線状、上部は直線状であり、これは壁面摩擦を考慮した破壊形態を表している⁶⁾。これより RPFEM を用いることで、作用方向 θ の違い、つまり壁面摩擦角 δ の違いによる破壊形態への影響が明らかとなった。また、くさび状に似た土塊の剛体すべりが表現できていることも確認できた。

せん断抵抗角 $\phi=30^\circ$ の地盤における全77ケースの中で(e)の載荷境界条件における $\|\rho T\|$ が最小値となっており、この場合の $\|\rho T\|$ が背面土砂を支える最小の土圧合力、つまり主働土圧合力 P_a であると推察された。

また、(f)~(i)図は仮想擁壁と接している地盤の壁面部に顕著な等価ひずみ速度が発生している。(h)図内には、擁壁上端の壁面部の拡大図を示す。特に(h)および(i)は地盤内ではなく仮想擁壁と地盤間で内部消散が卓越しており、破壊モードが他とは異なることが示された。

(3) 主働土圧合力の作用点の推定

(a)~(c)図の変位速度場をみると、仮想擁壁を時計回りに回転させようとする破壊モードであり、(g)~(i)をみると逆に反時計回りの破壊モードとなっている。これらは背面地盤に作用させる極限荷重 ρT の作用位置と、背面地盤が仮想擁壁に及ぼす主働土圧合力 P_a の作用点が鉛直方向にずれていることを表している。本来、両者の力は作用反作用の法則が成立し、その場合は(d)図あるいは(e)図のように仮想擁壁は回転せず、地盤壁面部を外方に等変位する変形モードとなる((e)図内に擁壁壁面部の拡大図を示す)。

以上より、RPFEM を用いて主働土圧合力 P_a を算定すると、極限荷重 $\|\rho T\|$ が最小値となる場合の境界条件から主働土圧合力の作用点が推定できることが明らかとなった。

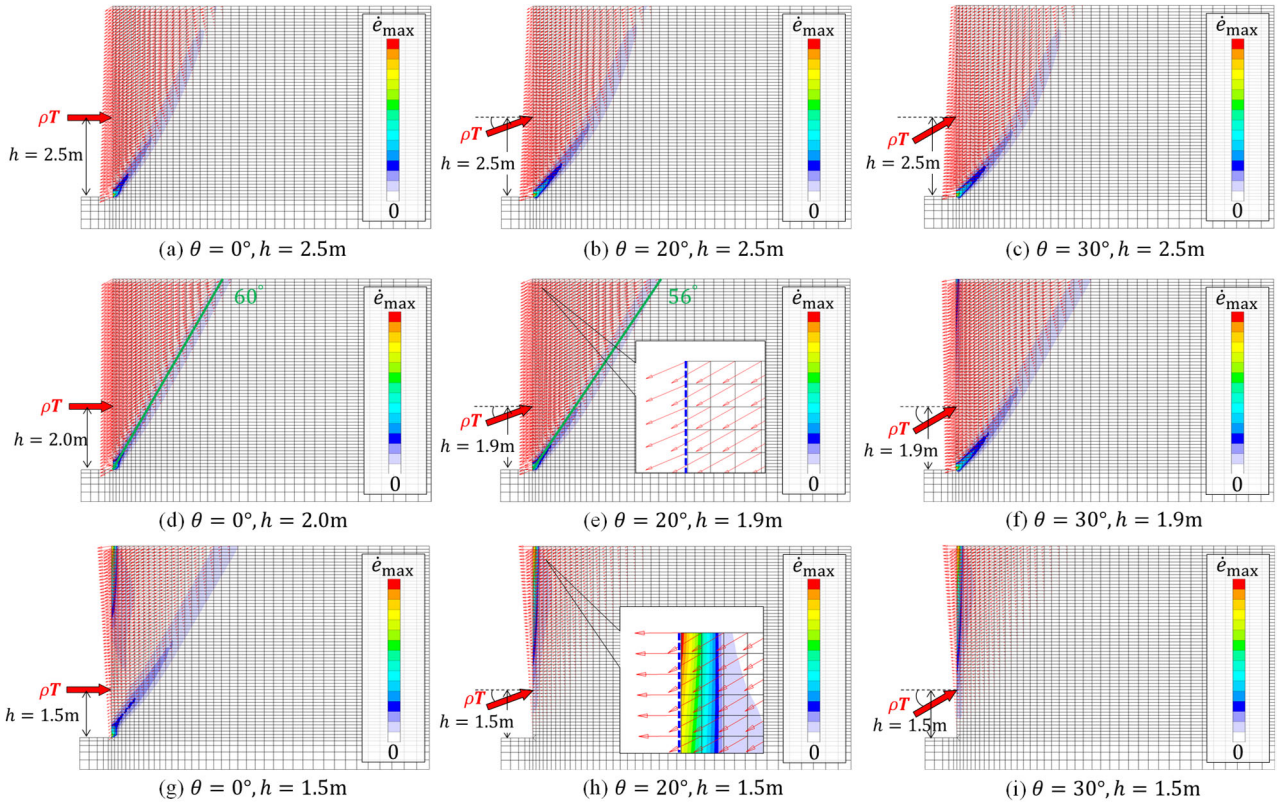


図 4 破壊形態 ($\phi=30^\circ$)

4. 擁壁背面角および地表面傾斜角を考慮した主働土圧算定

4.1 解析条件

前章までは、仮想擁壁の背面が鉛直（擁壁背面角 $\alpha=0^\circ$ ）、背面地盤の地表面が水平（地表面傾斜角 $\beta=0^\circ$ ）である典型的な地盤での主働土圧合力 P_a について RPFEM を適用して算定した。本章では、実際の地盤の幾何的な形状を想定した主働土圧合力 P_a の事例解析を示す。

本章で設定した仮想擁壁の背面角は鉛直（ $\alpha=0^\circ$ ）から反時計回りに $\alpha=20^\circ$ までの角度を 5° ピッチで設定した（計 5 パターン）。また、背面地盤の地表面は水平（ $\beta=0^\circ$ ）から $\beta=20^\circ$ までの傾斜角を 5° ピッチで設定した（計 5 パターン）。以上より、背面地盤の形状としては計 25 パターンを設定した。本算定で用いる有限要素メッシュの一例を図 5（ここでは、 $\alpha=10^\circ, \beta=10^\circ$ ）に示す。

背面地盤の土質パラメータおよび擁壁摩擦のモデル化については前章と同様とし表 1 の各値を用いた。基準荷重 T の作用条件 (h, θ) についても前章と同様とし、作用位置 h については擁壁高さ H の下端から 1/3 から 1/2 高さ付近までを 0.1m ピッチで設定した。また作用方向 θ については擁壁背面の法線方向を $\theta=0^\circ$ とし、反時計回りに背面地盤のせん断抵抗角 ϕ までの角度を 5° ピッチで設定した。

4.2 解析結果

(1) 主働土圧合力の算定

前章で検討した主働土圧算定法を適用し、25 パターン

の背面地盤形状において、基準荷重 T の作用条件 (h, θ) による全ケースの極限荷重 $\|\rho T\|$ のうち、最小値となる主働土圧合力 P_a を求めた。

せん断抵抗角 $\phi=30^\circ$ の背面地盤の主働土圧合力 P_a と、その時の作用方向 θ および作用位置 h を表 3 に示す。同様に $\phi=35^\circ, 40^\circ$ の算定結果をそれぞれ表 4, 表 5 に示す。表 3 左側の主働土圧合力 P_a と擁壁背面角 α の関係をグラフにしたものが図 6 である。

これらを見ると、 α, β ともに増加すると主働土圧合力 P_a も増加するが、地表面傾斜角 β よりも擁壁背面角 α の増加の方が P_a の増分が大きいことがわかる。またこの傾向は地盤のせん断抵抗角が違っても同様であることがわかった。

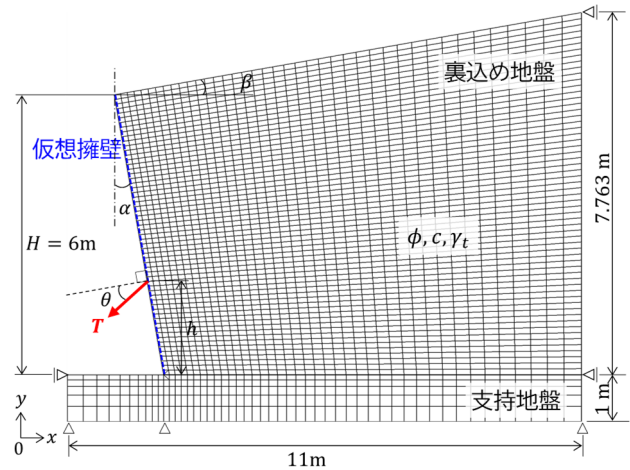


図 5 有限要素メッシュの一例 ($\alpha=10^\circ, \beta=10^\circ$)

表 3 各擁壁背面角 α 、地表面傾斜角 β における主働土圧合力 P_a [kN/m] : 左, 作用方向 θ : 中, および作用位置 h : 右 ($\phi=30^\circ$)

主働土圧合力: P_a [kN/m]	β [°]					
	0	5	10	15	20	
α [°]	0	88.2	92.9	99.7	108.5	120.8
	5	98.9	105.5	113.8	124.3	138.8
	10	112.1	120.1	130.0	142.3	159.0
	15	127.5	137.0	148.5	162.9	182.0
	20	144.7	156.1	169.4	186.2	208.1

作用方向: θ [°]	β [°]				
	0	5	10	15	20
α [°]	0	20	20	20	20
	5	20	20	15	15
	10	20	20	15	10
	15	15	15	10	10
	20	15	10	10	5

作用位置: h [m]	β [°]				
	0	5	10	15	20
α [°]	0	1.9	1.9	1.9	2.0
	5	1.9	2.0	2.0	2.2
	10	2.0	2.0	2.1	2.4
	15	2.1	2.3	2.3	2.6
	20	2.2	2.5	2.5	3.0

表 4 各擁壁背面角 α 、地表面傾斜角 β における主働土圧合力 P_a [kN/m] : 左, 作用方向 θ : 中, および作用位置 h : 右 ($\phi=35^\circ$)

主働土圧合力: P_a [kN/m]	β [°]					
	0	5	10	15	20	
α [°]	0	71.0	74.1	78.8	84.6	92.1
	5	81.4	85.9	91.8	99.1	108.3
	10	94.2	100.1	107.2	115.9	126.9
	15	109.0	116.2	125.0	135.2	148.2
	20	125.8	134.6	144.9	157.2	172.5

作用方向: θ [°]	β [°]				
	0	5	10	15	20
α [°]	0	20	20	20	20
	5	20	20	15	15
	10	20	15	15	15
	15	15	15	10	10
	20	15	10	10	5

作用位置: h [m]	β [°]				
	0	5	10	15	20
α [°]	0	1.9	1.9	1.9	2.0
	5	2.0	2.0	2.0	2.2
	10	2.0	2.1	2.2	2.5
	15	2.3	2.4	2.5	2.8
	20	2.4	2.5	2.7	3.1

表 5 各擁壁背面角 α 、地表面傾斜角 β における主働土圧合力 P_a [kN/m] : 左, 作用方向 θ : 中, および作用位置 h : 右 ($\phi=40^\circ$)

主働土圧合力: P_a [kN/m]	β [°]					
	0	5	10	15	20	
α [°]	0	56.3	57.9	61.2	65.0	69.7
	5	65.9	69.0	73.0	78.0	84.0
	10	78.0	82.1	87.3	93.4	100.8
	15	92.1	97.4	103.8	111.3	120.5
	20	108.2	114.9	122.9	132.2	143.2

作用方向: θ [°]	β [°]				
	0	5	10	15	20
α [°]	0	20	20	20	20
	5	20	20	15	15
	10	15	15	15	10
	15	15	15	10	10
	20	10	10	10	5

作用位置: h [m]	β [°]				
	0	5	10	15	20
α [°]	0	1.9	1.9	1.9	2.0
	5	2.0	2.0	2.0	2.2
	10	2.2	2.2	2.3	2.5
	15	2.4	2.4	2.5	3.0
	20	2.6	2.7	2.6	3.1

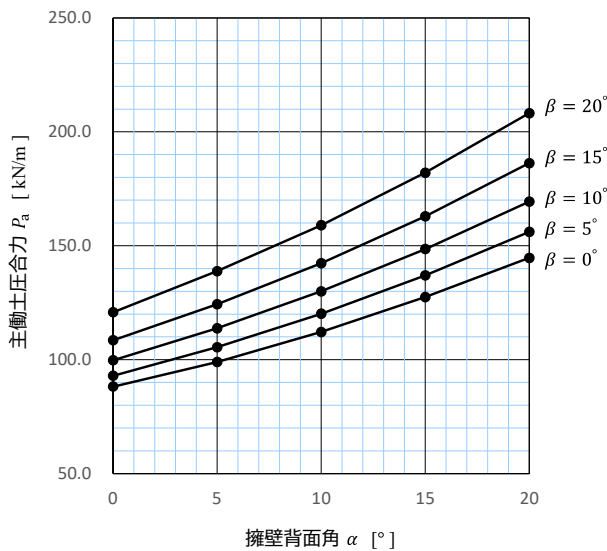


図 6 主働土圧合力 P_a と擁壁背面角 α 、地表面傾斜角 β の関係 ($\phi=30^\circ$)

次に、表 3~5 の作用方向 θ (表中央), 作用位置 h (表右側) をみると、擁壁の背面が鉛直に近い($\alpha=0^\circ$)ほど地表面の傾斜は作用方向、作用位置にあまり影響を与えない。また、擁壁背面角 α および地表面傾斜角 β がともに大きくなると作用方向 θ は小さくなり、作用位置 h は上昇した。つまり、壁面摩擦の影響が小さくなるとともに、仮想壁に作用する主働土圧分布が変化することが明らかとなった。

(2) 破壊形態

擁壁背面角 $\alpha=10^\circ$ 、地表面傾斜角 $\beta=10^\circ$ での RPFEM を用いた主働土圧算定から得られる破壊形態を図 7 に示す。本計算で得られる主働土圧合力は $P_a=130.0$ kN/m であり、そ

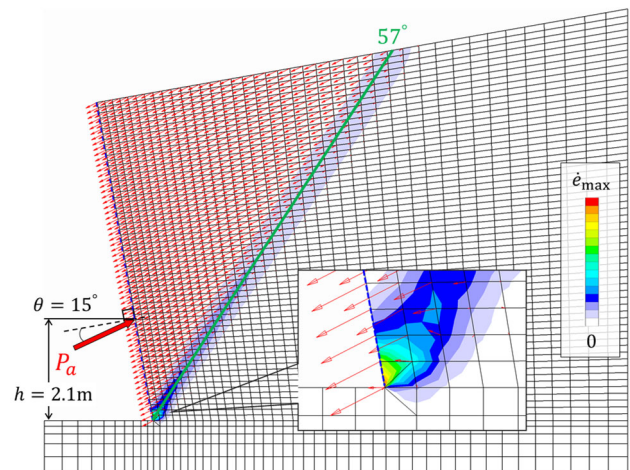


図 7 破壊形態 ($\alpha=10^\circ, \beta=10^\circ$)

の時の作用方向は $\theta=15^\circ$ 、作用位置 (=作用点) は $h=2.1$ m と得られた。図 7 には、壁面摩擦角 $\delta=15^\circ$ としたときの Coulomb 土圧論から得られる直線すべり線とその角度についても併記した (Coulomb 土圧論から得られる主働土圧合力は $P_a=132.6$ kN/m)。

図 7 をみると等価ひずみ速度が顕著に発生している帯状の領域と Coulomb 土圧のすべり線が概ね一致することがわかる。これは他の 24 パターンの地盤形状の算定でも同様であることが確認できた。厳密には、帯状の領域は上に凸の曲線状であるが、主働状態ではほぼ直線状の領域として近似できることが確かめられた。また、仮想擁壁と帯状の領域で区切られる楔状の土塊も剛体すべりであることが確認された。

5. 地震時における主働土圧算定

5.1 解析条件

次に RPFEM を適用して地震時における主働土圧を算定し、物部・岡部の土圧式^{11),12),13)}と比較検証する。

本章で使用した背面地盤の有限要素メッシュおよび材料パラメータ、擁壁摩擦のモデル化は3章と同様である。

本論文では震度法に基づき地盤の物体力 X として水平震度 k_h を乗じた慣性力を、擁壁側に向かって水平に作用させた。ここで水平震度は $k_h=0.1\sim 0.4$ とし、鉛直震度は $k_v=0$ とした。

5.2 解析結果

(1) 地震時主働土圧合力の算定

ここでは、せん断抵抗角 $\phi=30^\circ$ の背面地盤での地震時主働土圧について考察する。各水平震度 k_h において基準荷重 T の作用条件 (h,θ) を変えた全ケースの中で最小値となる極限荷重 $\|\rho T\|$ 、つまり地震時主働土圧合力 P_{ae} を表6に示す。また、表7には表6で得られた極限荷重 $\|\rho T\|$ の作用位置、つまり土圧合力の作用点 h を示す。なお、表6内で各水平震度における P_{ae} の最小値に色付けした。

表6 各水平震度 k_h における地震時主働土圧合力 P_{ac} [kN/m]

作用方向		θ [°]						
水平震度		0	5	10	15	20	25	30
k_h	0.0	97.2	93.2	90.5	88.8	88.2	88.4	90.1
	0.1	116.9	113.5	110.8	109.3	109.1	110.2	112.7
	0.2	143.0	139.4	137.4	136.7	137.2	139.1	143.3
	0.3	174.4	171.8	171.1	172.2	174.7	179.0	185.1
	0.4	215.3	214.5	216.6	220.3	226.8	235.0	248.3

表7 地震時主働土圧合力 P_{ac} の作用点 h [m]

作用方向		θ [°]						
水平震度		0	5	10	15	20	25	30
k_h	0.0	2.0	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
	0.1	2.2	2.3	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0
	0.2	2.6	2.5	2.3	2.2	2.1	2.0	2.1
	0.3	2.9	2.8	2.7	2.5	2.5	2.2	2.0
	0.4	3.2	3.1	2.8	2.7	2.9	2.4	2.2

表6および表7をみると、水平震度 k_h の大きさに応じて、 P_{ae} の作用方向 θ や作用点 h が変化することが示され、地震力が大きくなるにつれて P_{ae} の作用方向は水平に近づき、また作用点 h も高くなった。本論文では擁壁を仮想のものとしたが、実際には擁壁を転倒させようとするモーメントが増加することになり、注意を要することが明らかとなった。

ここで、表6中の色付きした地震時主働土圧合力 P_{ae} と水平震度 k_h の関係を図8に示す。これらの結果の妥当性を確認するため、物部・岡部の土圧式より地震時主働土圧合力を求め、図8に併記することにより両者を比較した。

図8をみると、ほぼ同程度の値が得られており、本計算手法の妥当性が確認できた。なお、紙面の関係で省略するが、せん断抵抗角 $\phi=35^\circ, 40^\circ$ の背面地盤でも同様の結果が得られたことを確認した。

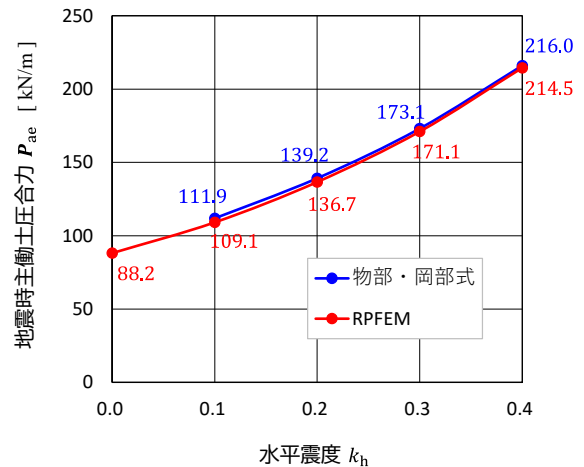
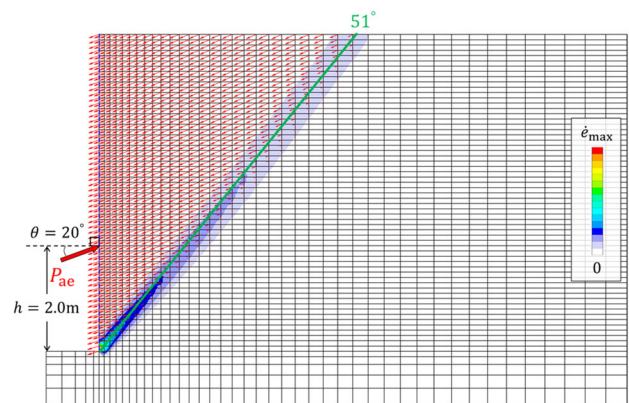


図8 RPFEMと物部・岡部の土圧式との比較

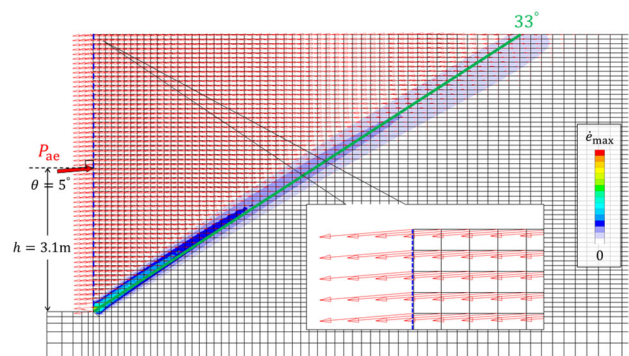
(2) 破壊形態

水平震度 $k_h=0.1$ および $k_h=0.4$ での破壊形態をそれぞれ図9に示す。図中には物部・岡部の土圧式で得られる直線すべり線と角度についても併記した。

図9(a)の $k_h=0.1$ では若干、下に凸の破壊形態であることがわかる。一方、(b)の $k_h=0.4$ では、RPFEMによって得られた等価ひずみ速度分布が物部・岡部の土圧論のような明らかな直線すべりではなく、上に凸の曲線状となっていることがわかる。また、水平震度が大きい変位速度場もほぼ水平に変形していることから、土圧分布も変化し、土圧合力の作用点が上方へ変化したと推察される。



(a) 水平震度 $k_h=0.1$ の場合 ($P_{ae}=109.1$ [kN/m])



(b) 水平震度 $k_h=0.4$ の場合 ($P_{ae}=214.5$ [kN/m])

図9 破壊形態 (地震時)

6. 結論

擁壁構造物の設計で重要となる主働土圧合力の算定について、本論文は極限定理の一つである上界定理に基づき、極限解析の枠組みで主働土圧を算定する新たな手法を提案し、平常時および地震時を想定した水平方向慣性力作用時で土圧の算定を試みた。本論文では、重力のような一定の物体力が作用する地盤に、擁壁を介して地盤に載荷される表面力を基準荷重とし、その与え方を工夫することで、外力仕事率が正になることに着目し、RPFEMを用いて主働土圧合力が求められることを示した。さらに、土圧合力の作用点や壁面摩擦を考慮した主働土圧を合理的に算出できることも示した。

RPFEMは境界値問題に応じた破壊形態を求めることができるが、擁壁背後の地盤内の破壊形態はCoulomb土圧や物部・岡部の直線すべりと異なり、土圧作用位置や地震時の慣性力の作用によって若干の曲線すべりを形成することが示された。既存の土圧理論では土圧の深さ方向への線形分布から土圧合力の作用点を仮定しているが、特に地震時の場合に慣性力を考えると土圧分布の変化により、土圧作用点や作用方向が異なる問題のあることを明らかにし、合理的な解析の必要性を示した。

謝辞

本研究は高専一長岡技科大共同研究助成の補助を受けた。

参考文献

- 1) 土質工学会編：土質工学ハンドブック，pp.266-267，1982.
- 2) 水野和憲，前田宗春，大塚悟，小林俊一：静的および地震時における擁壁主働土圧の解析，応用力学論文集，Vol.20，I_313-I_320，2017.
- 3) 前田宗春，水野和憲，大塚悟：上界計算に基づく擁壁主働土圧の算定に関する研究，土木学会中部支部研究発表会，III-028，pp.289-290，2018.
- 4) 鉄道総合技術研究所：鉄道構造物等設計標準・同解説 土留め構造物，2012.
- 5) (社)日本道路協会：道路土工 擁壁工指針(平成24年度版)，2012.
- 6) 星埜和・加藤渉・三木五三郎・榎並昭共訳：新版 テルツアギ・ペック，土質力学，基礎編，丸善，pp.174-175，1969.
- 7) Tamura, T. : Rigid-Plastic Finite element method in Geotechnical Engineering, Computational Plasticity, Current Japanese Material Research, pp.15-23, 1990.
- 8) 大塚悟，宮田善郁，池本宏文，岩部司：剛塑性有限要素法による斜面安定解析，地すべり，Vol.38，No.3，pp.235-243，2001.
- 9) 保科隆，瀧本英朗，田中達也，磯部公一，大塚悟：剛塑性有限要素解析による地山補強土工法の補強効果の評価，応用力学論文集，Vol.13，pp.379-389，2010
- 10) 沖見芳秀，右近八郎，吉清孝：剛塑性有限要素法による支持力解析におけるモデル化について，第44回土木学会年次学術講演会講演概要集，III，pp.966-967，1989.
- 11) 物部長徳：地震上下動に関する考察並びに震動雑論，土木学会誌，Vol.10-5，1924.
- 12) Mononobe, N. and Matsuo, H. : On determination of earth pressure during earthquake, Proc. World Engineering Congress, Tokyo, Vol.9, pp.177-185, 1929.
- 13) Okabe, S. : General theory on earth pressure and seismic stability of retaining wall and dam, Journal of Japan Society of Civil Engineers, Vol.10, No.6, pp.1277-1323, 1924.

Rigid Plastic Finite Element Analysis for Active Earth Pressure based on the Upper Bound Theorem

Kazunori MIZUNO¹, Tenri NANBA², Satoru OHTSUKA³

1 National Institute of Technology, Gifu College, Department of Civil Engineering

2 National Institute of Technology, Gifu College, Advanced Course for Interdisciplinary Technology Development

3 Nagaoka University of Technology, Department of Civil and Environmental Engineering

Abstract

Traditionally, earth pressure calculation methods based on the Coulomb's earth pressure theory have been widely used in retaining wall design, but there have been few applications of active earth pressure calculations using limit analysis based on the upper bound theorem. In this study, we develop an active earth pressure calculation method using the Rigid Plastic Finite Element Method (RPFEM) based on the upper bound theorem.

In this paper, we propose a method to rationally evaluate the active earth pressure acting on a virtual retaining wall within the framework of limit analysis. We calculate the active earth pressure of a typical backfill ground and demonstrate the validity of this calculation method by comparing it with the Coulomb's earth pressure theory. We also mention modeling of the friction between the retaining wall and the ground. Finally, we introduce a case study to calculate the seismic active earth pressure.

Key words: Active Earth pressure, Retaining Wall, Rigid Plastic Finite Element Method, Upper Bound Theorem, Limit Analysis