

上下負荷面摩擦モデルによる stick-slip 現象および非一様なすべり伝播過程の数値解析  
Numerical analysis of stick-slip phenomena and non-uniform slip propagation  
using super/sub-loading surface friction model

安池 亮<sup>1</sup>, 豊田智大<sup>2</sup>, 野田利弘<sup>2</sup>

- 1 名古屋大学大学院・工学研究科土木工学専攻・yasuike.ryo.z9@s.mail.nagoya-u.ac.jp  
2 名古屋大学大学院・工学研究科土木工学専攻

概 要

固体変形解析における接触面は固着・すべり状態の二者択一で与えるのが専らであるが、実際は固着～すべり間で連続的に遷移する。これまで著者らは、その滑らかな遷移過程を記述可能な時間依存性上下負荷面摩擦モデルを提案してきた。本稿では、同モデルが stick-slip 現象および法線応力変化に伴うすべりの発生間隔・すべり量の差異を表現可能であることを示す。また、動的微小変形弾性解析の境界条件に同モデルを実装し、単純せん断変形場に適用した。その結果、時間経過に伴い接触面の法線応力分布が非一様となり、法線応力が減少した領域を起点としてすべりが発生し、応力の再配置を伴いつつ他の領域へとすべり領域が拡大・伝播してゆく過程が解かれた。

キーワード：摩擦, stick-slip, すべり伝播, 弾塑性, 動的解析

1. はじめに

地盤変形解析の大半は、地盤の境界条件を常に固着状態または完全塑性すべり状態の二者択一で与えるが、実際の境界面の状態は固着～すべり間で連続的に遷移する。これにより、たとえ微小変形弾性解析であっても、物体は強非線形挙動を呈する（境界非線形性）。そこで、これまで著者らは、尾崎ら<sup>1</sup>の時間依存性下負荷面摩擦モデルに Asaoka et al.<sup>2</sup>の提唱した上負荷面概念を導入した時間依存性上下負荷面摩擦モデル<sup>3</sup>を提案してきた。本摩擦モデルは、静止摩擦の動摩擦に対する上回りを構造の「嵩張り」とみなし、その発展則として、静止摩擦から動摩擦への遷移あるいは時間経過に伴う摩擦の回復を記述するモデルである。本稿では、本提案モデルが摩擦由来の顕著な動力学現象（stick-slip 現象）と、法線応力変化に伴うすべりの発生間隔・すべり量・摩擦力減少量の差異を表現可能であることを示す。

また、同モデルを動的微小変形弾性解析の境界条件として実装し、単純せん断変形場に適用した。時間経過に伴い接触面の法線応力分布が非一様に変化し、法線応力が減少した領域を起点としてすべりが発生し、接触面内での応力再配置を伴いつつ他の領域へとすべり領域が拡大・伝播してゆく様子が得られたので、これを紹介する。

2. 時間依存性上下負荷面摩擦モデルの概要

本モデルは、摩擦力の連続的な変化を表現可能な弾塑性力学に基づく接触面の接触応力速度とすべり速度（相対速度）の関係を与える速度型の構成式である。ここでは、本摩擦モデルの基礎式とそこから導出される弾塑性構成式について説明する。より詳細な式変形などは既報<sup>3</sup>に譲る。

2.1 すべり速度の加算分解

解析対象に接する母材に対する物体のすべり速度 $\bar{v}$ は、次式に示すように接触面における接線方向成分 $\bar{v}_t$ と法線方向成分 $\bar{v}_n$ に分解される。

$$\bar{v} = \bar{v}_t + \bar{v}_n, \quad \begin{cases} \bar{v}_t = \bar{v} - \bar{v}_n = (I - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{v} \\ \bar{v}_n = (\bar{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{v} \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は母材から見て外向き単位法線ベクトルを表す。各記号の詳細は図1に示す。さらに、すべり速度 $\bar{v}$ は接触面の弾性成分 $\bar{v}^e$ 、塑性成分 $\bar{v}^p$ に加算分解される。

$$\bar{v} = \bar{v}^e + \bar{v}^p \quad \begin{cases} \bar{v}_t = \bar{v}_t^e + \bar{v}_t^p \\ \bar{v}_n = \bar{v}_n^e + \bar{v}_n^p \end{cases} \quad (2)$$

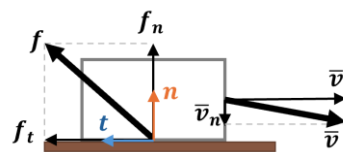


図1 接触面での各種変数の定義

## 2.2 弾性構成式

接触応力 $\mathbf{f}$ の接線方向成分 $\mathbf{f}_t$ および法線方向成分 $\mathbf{f}_n$ は次式で与える。

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_n, \quad \begin{cases} \mathbf{f}_t = \mathbf{f} - \mathbf{f}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n})\mathbf{f} \\ \mathbf{f}_n = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n}\mathbf{n})\mathbf{f} \end{cases} \quad (3)$$

弾性構成式は、 $\mathbf{f}_t$ および $\mathbf{f}_n$ を用いて次式で与える。ただし、マイナス記号は物体に作用する接触応力速度と物体のすべる向きが逆向きであることによる。 $\alpha_t, \alpha_n$ は接触面の接線、法線方向の弾性係数であり、接触解析におけるペナルティ係数に相当する。

$$\dot{\mathbf{f}}_t = -\alpha_t \dot{\mathbf{v}}_t^p, \quad \dot{\mathbf{f}}_n = -\alpha_n \dot{\mathbf{v}}_n^p \quad (4)$$

また、弾性構成式は2階の弾性係数テンソル $\mathbf{C}^e$ を用いて次式で表す。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{C}^e = -\alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}) - \alpha_n (\mathbf{n}\mathbf{n}) \quad (5)$$

また、 $\mathbf{f}$ の共回転速度 $\dot{\mathbf{f}}$ と物質時間微分 $\dot{\mathbf{f}}$ の関係は接触面の剛体回転スピ $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{n}}\mathbf{n}$ を用いて次式で表される。

$$\dot{\mathbf{f}}_t = \dot{\mathbf{f}}_t - \mathbf{\Omega} \mathbf{f}_t, \quad \dot{\mathbf{f}}_n = \dot{\mathbf{f}}_n - \mathbf{\Omega} \mathbf{f}_n \quad (6)$$

## 2.3 降伏関数

まず、図2の接線応力ノルム～法線応力ノルム空間に正規すべり面として等方的なCoulombの摩擦基準面を定義する。それに相似でかつ高位の位置に相似比 $R^*$  ( $\mu_k/\mu_s \leq R^* \leq 1$ )のすべり上負荷面を定義する。ここに、 $\mu_k, \mu_s$ は動摩擦係数、静止摩擦係数である。すべり上負荷面の傾きは静止摩擦係数を最大、動摩擦係数(正規すべり面に一致)を最小とする範囲内で変動する。本モデルは、正規すべり面(動摩擦)より上側に状態(静止摩擦)を取ることを摩擦係数の「嵩張り」として捉え、その嵩張りが接触面の「構造」に起因するとしたモデルである。さらにすべり上負荷面に相似でかつ現応力を通る相似比 $R$  ( $0 \leq R \leq 1$ )のすべり下負荷面を定義する。したがって、正規すべり面、すべり上負荷面、すべり下負荷面は次式となる。

$$\text{正規すべり面: } \|f_t\| = \mu_k \|f_n\| \quad (7)$$

$$\text{すべり上負荷面: } \|f_t\| = (\mu_k/R^*) \|f_n\| \quad (8)$$

$$\text{すべり下負荷面: } \|f_t\| = (R\mu_k/R^*) \|f_n\| \quad (9)$$

よって、降伏関数は次式である。

$$F(\|f_t\|, \|f_n\|) = \|f_t\| - (R\mu_k/R^*) \|f_n\| \quad (10)$$

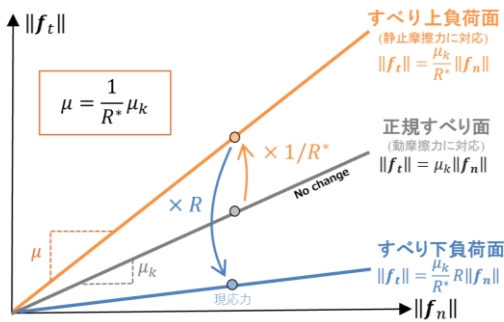


図2 すべり負荷面

## 2.4 適応条件式

降伏関数より適応条件式は以下ようになる。

$$F(\|f_t\|, \|f_n\|) = 0 \quad (11)$$

## 2.5 非関連すべり流動則

塑性すべり速度に関する非関連すべり流動則を次式とする。ここで、塑性乗数 $\lambda$ は正の比例乗数であり、 $\mathbf{t}$ は $\mathbf{t} = \mathbf{f}_t/\|f_t\|$ と定義される。

$$\dot{\mathbf{v}}^p = \dot{\mathbf{v}}_t^p = -\lambda \mathbf{t} \quad (\dot{\mathbf{v}}_n^p = 0) \quad (12)$$

この式は、相対変位に対してダイレイタンスの影響を無視した式となっている。右辺のマイナスは接触応力に基づく $\mathbf{t}$ と塑性すべり速度 $\dot{\mathbf{v}}^p$ が逆向きであることによる。

## 2.6 正規すべり比 $R$ の発展則

正規すべり比 $R$ の発展則は次式で与える。ここで、 $r$ は非負の材料定数である。

$$\dot{R} = U(R) \| \dot{\mathbf{v}}^p \|, \quad U(R) = -r \ln R \quad (13)$$

## 2.7 構造の程度 $1/R^*$ の発展則

構造の程度を表す $1/R^*$ の発展則は次式とする。

$$\dot{R}^* = \kappa \frac{R^{*2}}{\mu_k} \left( \frac{1}{R^*} - 1 \right)^m \| \dot{\mathbf{v}}^p \| - \xi \frac{R^{*2}}{\mu_k} \left( 1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*} \right)^n \quad (14)$$

$\kappa, m, \xi, n$ は非負の材料定数であり、Toyoda et al.<sup>3)</sup>の表記に倣い定義した。本発展則は図3に示すように、右辺第一項は静止摩擦から動摩擦への摩擦力減少を塑性すべりに伴う構造の喪失としてモデル化しており、右辺第二項は動摩擦から静止摩擦への摩擦力増加を時間経過に伴う構造の回復としてモデル化している。

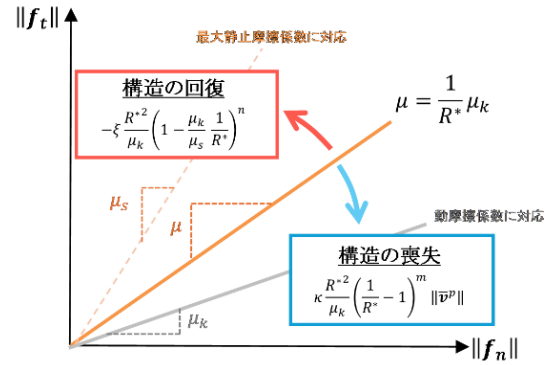


図3 構造の程度  $1/R^*$ の発展則

## 2.8 上下負荷面摩擦モデルの構成式および負荷判定

2.1~2.7の基礎式から、塑性すべり速度の大きさを決める塑性乗数 $\Lambda (= \lambda)$ は、すべり速度 $\dot{\mathbf{v}}$ を用いて次式となる。

$$\Lambda = \frac{(\alpha_n \frac{R}{R^*} \mu_k \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{v}} - \xi R \left( 1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*} \right)^n \| \dot{\mathbf{v}} \|}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k \| \dot{\mathbf{v}} \| - \kappa R \left( \frac{1}{R^*} - 1 \right)^m \| \dot{\mathbf{v}} \|} \quad (15)$$

以上の基礎式および塑性乗数から、接触応力速度 $\dot{\mathbf{f}}$ とすべり速度 $\dot{\mathbf{v}}$ に関する弾塑性構成式は次式となる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \begin{cases} \mathbf{C}^{ep} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}^e \mathbf{t} & \dots \text{負荷} (\dot{\mathbf{v}}^p \neq 0) \\ \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{v}} & \dots \text{除荷} (\dot{\mathbf{v}}^p = 0) \end{cases} \quad (16)$$

ここに,

$$C^e = C^e$$

$$\frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes \left( \alpha_n \frac{R}{R^*} \mu_k \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t} \right)}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k \|\mathbf{f}_n\| - \kappa R \left( \frac{1}{R^*} - 1 \right)^m \|\mathbf{f}_n\|} \quad (17)$$

$$C^e = \frac{\alpha_t \xi R \left( 1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*} \right)^n \|\mathbf{f}_n\|}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k \|\mathbf{f}_n\| - \kappa R \left( \frac{1}{R^*} - 1 \right)^m \|\mathbf{f}_n\|} \quad (18)$$

また、塑性すべり速度の負荷基準は塑性乗数 $\Lambda$ の正定性より次式で与えた。

$$\begin{cases} \Lambda > 0 & \dots \text{負荷 } (\dot{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0}) \\ \Lambda \leq 0 & \dots \text{除荷 } (\dot{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0}) \end{cases} \quad (19)$$

これ以降の3章および4章では、面の回転を考慮しない初期値問題あるいは初期値境界値問題に本モデルを適用して解析を実施したため、 $\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}} (\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0})$ としていることに留意されたい。

### 3. 一次元バネ～質点系モデルへの適用と摩擦モデルの特性把握

本稿では、図4に示すような剛性 $K$ のバネが繋がれた質量 $M$ の質点に一定のドライバ速度を与えることでstick-slip現象を呈する一次元バネ～質点系モデルを用いて動力学計算を実施した。このとき、一次元バネ～質点系におけるドライバ変位は時間 $t$  (開始時刻 $t = 0$ とする)において $\mathbf{v}_{\text{ext}} (\mathbf{v}_{\text{ext}} = \{v_{\text{ext}}, 0\}^T)$ であり、物体の相対すべり変位は $\bar{\mathbf{u}}$ であるため、バネの伸びは $\mathbf{v}_{\text{ext}} t - \bar{\mathbf{u}}$ と表される。したがって、物体の運動方程式は次式で与えられる。

$$M \ddot{\bar{\mathbf{x}}} = K(\mathbf{v}_{\text{ext}} t - \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{f} S + \mathbf{F}_{\text{out}} \quad (20)$$

ここに、 $S$ は接触面積を、 $\mathbf{F}_{\text{out}}$ は物体作用する摩擦力以外の外力を表している。本稿では、式(20)をさらに物質時間微分した次式の数値型運動方程式を、躍度線形性を仮定するWilson- $\theta$ 法<sup>4)</sup>によって時間離散化し、陰的時刻歴解析を実施した。

$$M \ddot{\bar{\mathbf{v}}} = K(\mathbf{v}_{\text{ext}} - \bar{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{f}} S + \dot{\mathbf{F}}_{\text{out}} \quad (21)$$

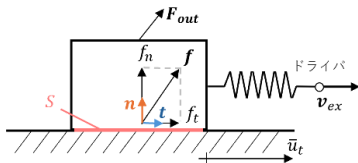


図4 一次元バネ～質点系モデル

#### 3.1 解析条件

本稿では、表1に示す5ケースの解析を実施した。Case 1~3は摩擦由来の動力学現象(安定すべり, stick-slip現象)を再現することを目的に、構造の程度 $1/R^*$ の発展則の係数を変化させて解析を実施した。Case 3~5は、物体の接触面に作用する法線応力の時間的増加/減少がstick-slip現象に与える影響を評価することを目的に、解析を実施した。つまり、物体に作用する摩擦力以外の外力速度 $\dot{\mathbf{F}}_{\text{out}}$ の法線方向成分 $\dot{F}_{\text{out},n}$ のみを与えて解析を実施した。その他のパ

ラメータおよび初期条件を表2に列記する。接触面の物性値および発展則のパラメータは、尾崎ら<sup>1)</sup>に倣い設定した。初期時刻において物体は静止しているものとして、初期の摩擦係数には静止摩擦係数 $\mu_s$ を設定し、初期法線応力として自重相当の鉛直荷重を与えた。

表1 解析ケース

Case	$\kappa$ (mm <sup>-1</sup> )	$\xi$ (s <sup>-1</sup> )	$\dot{F}_{\text{out},n} (= \dot{\mathbf{F}}_{\text{out}} \cdot \mathbf{n})$ (N/s)
1	0	0	0
2	10.0	0	0
3	10.0	0.002	0
4	10.0	0.002	-0.01
5	10.0	0.002	0.01

表2 各種パラメータと初期条件

接触面の物性値	
静止摩擦係数 $\mu_s$	0.4
動摩擦係数 $\mu_k$	0.2
接線方向のペナルティ係数 $\alpha_t$ (kPa/mm)	1000
法線方向のペナルティ係数 $\alpha_n$ (kPa/mm)	1000
発展則パラメータ	
正規圧密度化指数 $r$	100
構造喪失速度を規定する材料定数 $m$	1.0
構造回復速度を規定する材料定数 $n$	1.0
バネ～質点系パラメータ	
質量 $M$ (kg)	10
バネ定数 $K$ (N/mm)	10
ドライバの接線方向速度 $v_{\text{ext}}$ (mm/s)	0.001
接触面積 $S$ (m <sup>2</sup> )	1.0
初期条件	
初期の構造の程度 $1/R_0^* (= \mu_s/\mu_k)$	2.0
初期法線応力 $f_{n0}$ (Pa)	98.1
初期接線応力 $-f_{t0}$ (Pa)	$1.0 \times 10^{-6}$

#### 3.2 解析結果および考察

まず、Case 1~3の接線方向の相対すべり変位 $\bar{u}_t$ ～時間 $t$ 関係および摩擦力 $F_t$ ～時間 $t$ 関係を図5に示す。構造の喪失と回復を考慮しないCase 1(黒線)は、摩擦係数が変化せず、間欠性のない一様なすべり現象(安定すべり)が得られた。構造の喪失のみを考慮したCase 2(青線)では、一度だけ階段状の相対すべり変位 $\bar{u}_t$ ～時間 $t$ 関係(stick-slip現象)と摩擦力低下が現れる。これは、構造の喪失によって静止摩擦から動摩擦への摩擦力低下(軟化)を考慮したことによるものである。その後は、構造が回復することなく摩擦係数が一定となるため、Case 1同様の安定すべりが得られた。Case 3(赤線)では、間欠的なstick-slip現象が周期的に発生する結果となった。これは、構造の喪失による静止摩擦から動摩擦への摩擦力減少と構造の回復による動摩擦から静止摩擦への強度回復を考慮したことによるものである。

次に、Case 3~5の接線方向の相対すべり変位 $\bar{u}_t$ ～時間 $t$ 関係および摩擦力 $F_t$ ～垂直抗力 $F_n$ 関係を図6に示す。後者の図には静止摩擦係数と動摩擦係数に相当する傾きの直線も併記している。接触面の法線応力が時間的に増加するCase 4(緑線)では、法線応力を一定に保つCase 3(赤線)に対し、すべりの発生頻度の低下や一回当たりのすべり量・摩擦力減少量の増加が得られた。これは、Case 4が法

線応力の漸増により、Case 3 よりも現応力がすべり出す基準であるすべり上負荷面に到達しづらくなり、すべりが抑制されたことによるものである。一方、接触面の法線応力が時間的に減少する Case 5 (紫線) は、すべり発生頻度の増加や一回当たりのすべり量・摩擦力減少量が小さくなった。これは、Case 5 が法線応力の漸減により Case 3 よりすべり上負荷面に到達しやすくなり、すべりが促進されたことによる。

以上より、時間依存性上下負荷面摩擦モデルは安定すべりから stick-slip 現象まで摩擦由来の顕著な動力学現象や法線応力の増減に伴うすべりの抑制／促進を表現可能であることが示された。

#### 4. 動的微小変形弾性有限要素解析への適用

本章では時間依存性上下負荷面摩擦モデルを速度型運動方程式に基づく動的変形弾性解析に適用した。ただし、ここでは摩擦由来の強非線形挙動に着目するため、物体の材料非線形性や幾何的非線形性は無視した動的微小変形弾性解析を実施した。はじめに有限要素離散化手法の概要を示し、その後、適用事例として単純せん断場におけるすべりの伝播過程の解析事例を示す。

##### 4.1 有限要素離散化と計算処理の概要

本稿では、通常の固体解析における荷重速度境界条件と変位速度境界条件に加え、母材速度を与える接触力境界条件を新たに導入した (図 7)。

このとき、弱形式化された速度型運動方程式は以下となる。

$$\int_V \rho \ddot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \varepsilon} dV = \int_V \dot{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S_t} \dot{\mathbf{t}}_t \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_{S_c} \dot{\mathbf{f}}_c \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad (22)$$

ここに、 $\rho$ は物体の密度、 $\boldsymbol{\sigma}$ は物体の応力速度、 $\dot{\mathbf{b}}$ は物体力速度、 $\dot{\mathbf{t}}_t$ は既知の荷重速度、 $\dot{\mathbf{f}}_c$ は接触力境界に作用する接触応力速度を表している。 $\mathbf{v}$ は物体の変位速度、 $\delta \mathbf{v}$ は任意関数 (ただし、変位速度境界  $S_u$  上で  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$  を満たす)、 $\boldsymbol{\delta \varepsilon}$  は仮想ひずみ速度を表している。

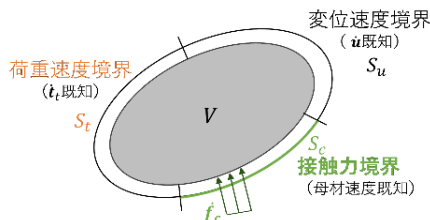
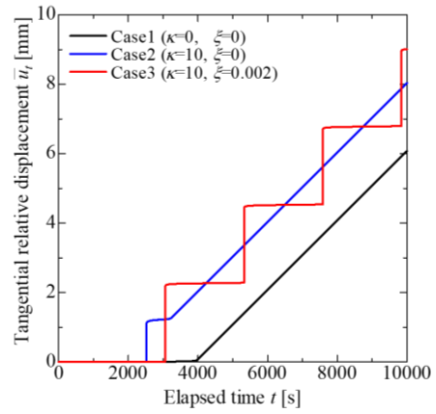


図 7 接触力境界を導入した境界条件

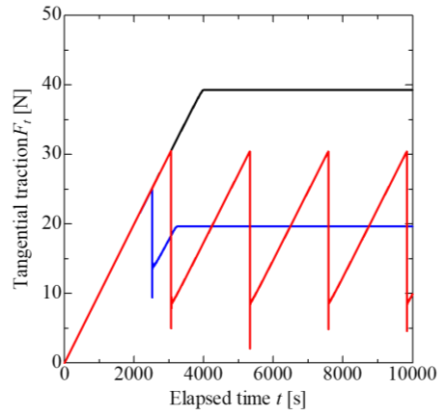
右辺第三項において上下負荷面摩擦モデルを適用し、定式化を行った。定式化の詳細は紙幅の都合上割愛するが、有限要素法における離散化式は次式となる。

$$M\{\dot{\mathbf{v}}^N\} + (K - K_C)\{\mathbf{v}^N\} = \{\dot{\mathbf{f}}\} \quad (23)$$

ここに、 $M, K$ は有限要素法における (変位速度境界条件の

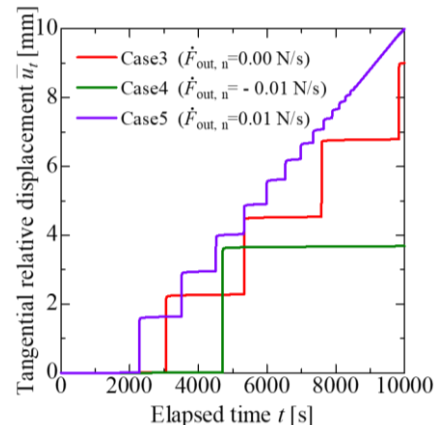


(a) 接線方向の相対すべり変位  $\bar{u}_t$  ~ 時間  $t$  関係

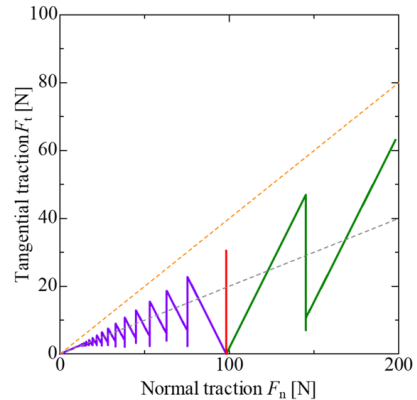


(b) 摩擦力  $F_t$  ~ 時間  $t$  関係

図 5 解析結果 (Case 1~3)



(a) 接線方向の相対すべり変位  $\bar{u}_t$  ~ 時間  $t$  関係



(b) 摩擦力  $F_t$  ~ 垂直抗力  $F_n$  関係

図 6 解析結果 (Case 1~3)



考慮により縮約された) 全体質量マトリクス, 全体剛性マトリクスであり,  $\{\mathbf{v}^N\}$  は (変位速度境界上の節点を除く) 全節点の変位速度を並べた係数列ベクトルである。また,  $K_c, \{\mathbf{f}\}$  は以下のように表される。

$$K_c = \begin{aligned} & \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} [\tilde{N}]^T [C^{ep}] [\tilde{N}] dS \quad \dots \text{負荷時} \\ & \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} [\tilde{N}]^T [C^e] [\tilde{N}] dS \quad \dots \text{除荷時} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}_0\} + \{\mathbf{f}_c\} \quad (25)$$

$$\{\mathbf{f}_c\} = \begin{aligned} & \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} \left\{ -[\tilde{N}]^T [C^{ep}] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} + C^e [\tilde{N}] \{\boldsymbol{\epsilon}\} \right\} dS \quad \dots \text{負荷時} \\ & \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} \left\{ -[\tilde{N}]^T [C^e] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} \right\} dS \quad \dots \text{除荷時} \end{aligned} \quad (26)$$

ここに,  $S_{c(e)}$  は要素境界毎の接触力境界,  $\Sigma_{(e)}$  はアセンブリング操作を表す。  $\{\mathbf{f}_0\}$  は物体力速度に由来するベクトルと荷重速度境界  $S_t$  上での既知表面力に由来する等価節点力ベクトルの和を表す。  $[N], [\tilde{N}]$  は有限要素法の形状関数に由来するマトリクスである。  $[C^{ep}], [C^e], C^e$  は上下負荷面摩擦モデルに由来するマトリクスであり, 表記法は Toyoda et al. <sup>3)</sup> に準ずる。  $\{\mathbf{v}_m^N\}$  は接触力境界上における既知母材速度の係数列ベクトルである。

本稿では, 式(23)を Wilson- $\theta$  法によって陰的に時間離散化して解析を実施した。式(24),(26)の接触力境界に関する積分計算は, 要素境界内での接触力分布を一次のアイソパラメトリック要素で補間し, 2 点の Gauss 積分を行った。本研究では, この接触力境界上の Gauss 点ごとに, 接触面の物理量 (接触応力, 摩擦係数, 構造など) を記憶している。これにより, 各 Gauss 点における負荷状態に応じた式(24),(26)の Gauss 積分の足し込みを選択的に行うことができ, より接触面の固着, すべり状態を考慮した動的変形解析を可能にした。

## 4.2 解析条件 (平面ひずみ条件)

解析条件は, 図 8 に示すような  $4\text{m} \times 20\text{m}$  の弾性体 80 要素の上面を完全固定, 底面を接触力境界, 左右側面を無応力境界とし, 解析対象に接する母材に水平変位速度  $\mathbf{v}_m$  ( $0.001\text{ m/s}$  で一定) を与えた。接触面の物性値および発展則パラメータは表 2 と同様の値を用いた。弾性体のパラメータおよび初期条件は表 3 の通りである。本稿では, 表 4 に示す通り, 接触力境界における摩擦係数を一定に保つ (構造の喪失と回復を考慮しない) Case 6 と, 構造の喪失と回復を考慮した Case 7 の 2 ケースの結果を示す。

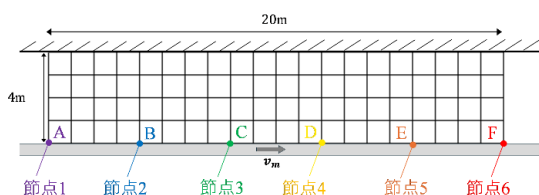


図 8 解析条件

表 3 弾性体のパラメータと初期条件

弾性体のパラメータ	
弾性係数 $E$ ( $\text{N/m}^2$ )	$1.0 \times 10^3$
ポアソン比 $\nu$	0.0
密度 $\rho$ ( $\text{g/cm}^3$ )	1.0
初期条件	
初期の構造の程度 $1/R_0^*$	2.0
初期法線応力 $f_{n0}$ (Pa)	1000
初期接線応力 $f_{t0}$ (Pa)	$1.0 \times 10^{-7}$

表 4 解析ケース

Case	$\kappa$ ( $\text{mm}^{-1}$ )	$\xi$ ( $\text{s}^{-1}$ )
6	0	0
7	10.0	0.01

## 4.3 解析結果

まず, Case 6 に関して, 時間経過に伴う解析対象の変形を図 9 に示す。図中の点線は初期状態を表している。また, 図 8 に示した各節点 (1~6) の接線方向の変位  $u_t \sim$  時間  $t$  関係を図 10 に, 各要素 (A~F) の底面に作用する摩擦力  $F_t \sim$  時間  $t$  関係および摩擦力  $F_t \sim$  垂直抗力  $F_n$  関係を図 11(a), (b) にそれぞれ示す。図 11 (b) には点線で, すべり規準面としてすべり上負荷面 (傾き一定) を併記している。解析初期段階においては, 底面全域が固着状態にあるため, 底面上の節点は一様に水平変位する。ところが, せん断変形の進展に伴い, 底面左端 (要素 A) では垂直抗力  $F_n$  が増大して滑りが抑制されるのに対し, 底面右端 (要素 F) では垂直抗力  $F_n$  が減少してすべりが促進される。その結果, 2000 s 付近で右端 (要素 F) において最初のすべりが発生する。これにより, 右端 (要素 F) が降伏するため, 2000 s 以降は, 残りの接触断面 (要素 B~F) で接線方向の荷重増分を分担することとなる。これにより, 要素で B~F では, 引き続き接線応力が増大してゆく (応力分布の再配置)。その後, せん断変形がさらに進展すると, 3000 s 付近で解析対象の中央部 (要素 B~E) が一斉に降伏し, 広域なすべりが発生する。これにより, 以降の接線荷重増分は専ら底面左端 (要素 A) で分担されることとなり, 要素 A における接線応力が顕著に増大することとなる。その後は, 4000 s 付近で左端 (要素 A) も降伏し, 領域全体ですべりを生じることとなる (5000 s)。

次に, 解析対象が右側からすべり始めた理由について考察する。初期には接触面で一様な垂直抗力を与えているが, 先述のように, 接触面での法線応力分布が非一様に変化してゆく。せん断変形は物体の主軸方向の伸長・圧縮に分解されるが, せん断変形に伴い圧縮を受ける物体の左下の接触面 (要素 A 付近) では, 法線応力が増加し, 伸長を受ける物体右下の接触面 (要素 F 付近) では法線応力が減少することとなる。その結果, 法線応力減少によりすべりが促進される右側が先に滑り出したのである。このすべり現象は, 3 章において説明した法線応力の減少・増加に伴うすべりの抑制・促進を表現する提案モデルを初期値境界値問題に導入することによって初めて解かれるものである。

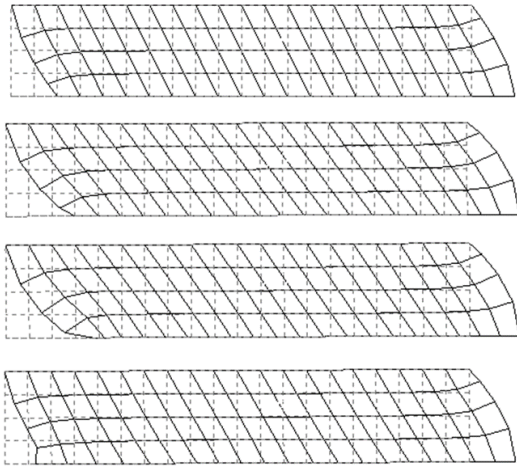


図 9 変形図 (上から2000s, 3000s, 4000s, 5000s での変形)

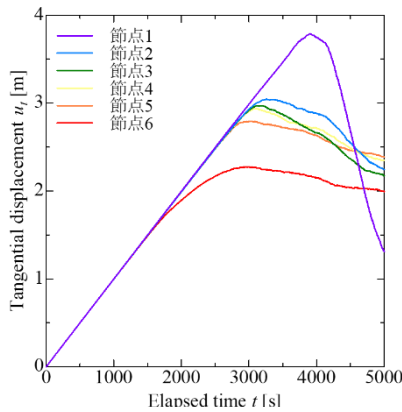
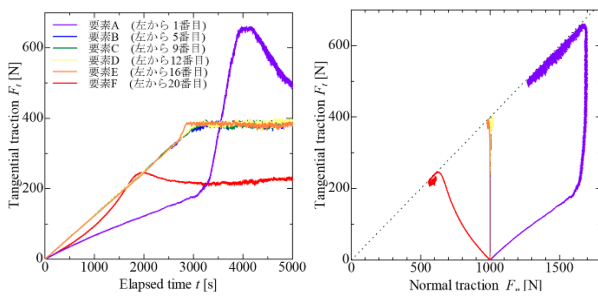


図 10 節点変位の時刻歴



(a) 摩擦力  $F_t$  ~ 時間  $t$  関係 (b) 摩擦力  $F_t$  ~ 垂直抗力  $F_n$  関係

図 11 解析結果

次に、底面に作用する摩擦力および垂直抗力の各合力 (各要素に作用する摩擦力および垂直抗力の和) の時刻歴を図 12 に示す。前述の通り、底面の各要素における法線応力分布は非一様に変動する一方、領域全体に作用する全垂直抗力は一定であることがわかる。これは、本解析では鉛直方向の母材速度を与えていないことによる。他方、全摩擦力は母材変位に比例して増加していき、最終的には最大静止摩擦力に漸近していく過程が解かれた (安定すべり)。このように、局所的には、法線応力の非一様分布の発現や、要素 A での顕著な接線応力の増減といった複雑な挙動も認められるが、大域的には法線応力一定下での安定すべりが解かれているという点で、前章 Case 1 のような質点モデルと同様の傾向が得られることが確認できた。

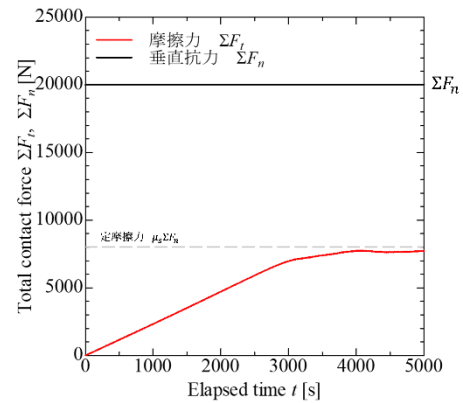


図 12 全摩擦力および全垂直抗力の時刻歴

次に、Case 7 に関して、時間経過に伴う解析対象の変形図を図 13 に、図 8 に示した各節点の接線方向の変位  $u_t$  ~ 時間  $t$  関係を図 14 に示す。接触力境界における構造の喪失および回復の影響を考慮した本解析では、Case 6 より顕著なすべり伝播が発生した。これは構造の喪失により接触面において顕著な軟化挙動を生じることによる。解析対象は、せん断変形に伴って右端でピーク強度発現後に軟化による著しい応力降下を伴って不安定化し、急激なすべりを生じる。このとき、周辺領域では Case 6 以上に大きな荷重を分担することとなるが、これを支持し切れない場合、周辺領域もピーク強度発現後に軟化を呈し、不安定化することとなる。これにより、一度発生したすべりは、留まることなく勢よく左端まで伝播していく結果となった。また、底面における急激なすべりの発生に伴い、物体内を伝わる実体波の発生 (Acoustic emission) が解析対象内に確認された。当日の講演では、動画を用いてこれらの結果を詳しく説明する。

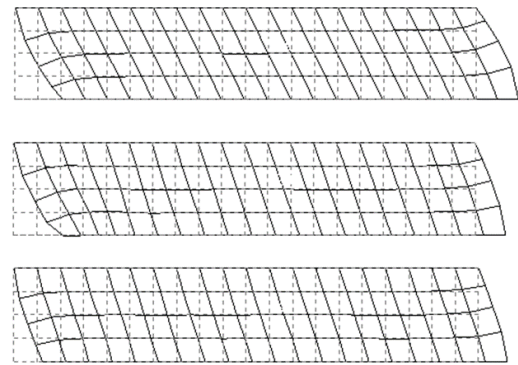
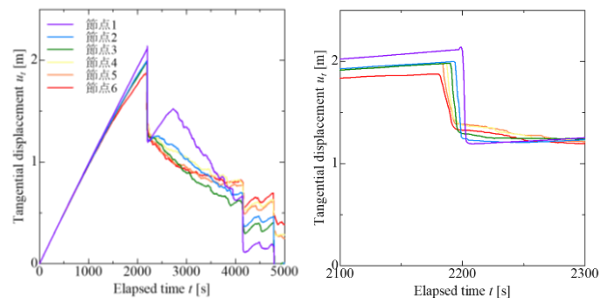


図 13 変形図 (上から2150s, 2200s, 2250s での変形)



(a) 0s ~ 5000s (b) 2100s ~ 2300s

図 14 節点変位の時刻歴

## 5. まとめと今後の展望

本項では、まず時間依存性上下負荷面摩擦モデルを初期値問題へ適用することで本モデルの表現能力の検証を行った。その中で、構造の発展則のパラメータを変化させることで定常的なすべり現象（安定すべり）から間欠的なすべり現象（stick-slip 現象）までを表現可能であることを確認した。さらに一次元バネ～質点系の物体に作用する法線応力を一様に増加／減少することが、すべりの抑制／促進あるいはすべり量の増加／減少をもたらすことをも表現可能であることを確認した。

さらに、本摩擦モデルを接触力境界条件として導入した動的有限要素解析手法を開発した。本手法を単純せん断場に適用し、法線応力の非一様化による局所的なすべりの促進／抑制により、すべり伝播過程が現れることと、初期値境界値問題を解いた帰結として局所的な摩擦力変動／応力再配置が評価可能であることを示した。一方、大域的な解としては質点モデルと同様の安定すべりが得られることを明らかにした。

今後の展望として、実験を通じたモデルの Validation を予定している。鋼材や土などの土木材料を用いて二物体間の stick-slip 現象の荷重～変位関係を計測し、その結果を本

摩擦モデルによって再現することで、モデルの妥当性を検証するとともに、接触面における材料定数の物理的意味について考察してゆく。また、本摩擦モデルを動的／静的水～土骨格連成有限変形解析手法の境界条件として実装するとともに、接触解析への展開も試みる予定である。

### 謝辞

本研究の実施にあたり、科学研究費補助金（基盤研究(B)：課題番号 22H01586）の助成を受けた。

### 参考文献

- 1) 尾崎伸吾, 橋口公一, 陳 玓行: 時間依存性摩擦構成式を用いたスティック・スリップ運動の安定性に関する検討, 応用力学論文集, pp. 445-455, 2007.
- 2) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior, *Soils and Foundations*, Vol.40, No.2, pp. 99-110, 2000.
- 3) Toyoda, T., Yasuike, R., Noda, T.: Super/sub-loading surface model for constitutive equation of friction, *Tribology International*, Vol. 191, 109080, 2024.
- 4) Noda, T., Asaoka, A., and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.48, No.6, pp. 771-790, 2008.

---

---

## Numerical analysis of stick-slip phenomena and non-uniform slip propagation using super/sub-loading surface friction model

Ryo YASUIKE<sup>1</sup>, Tomohiro TOYODA<sup>2</sup>, Toshihiro NODA<sup>2</sup>

1 Nagoya University, Department of Civil Engineering • yasuike.ryo.z9@s.mail.nagoya-u.ac.jp

2 Nagoya University, Department of Civil Engineering

### Abstract

We have proposed a super/subloading friction model which incorporates the superloading surface concept into the subloading friction model based on elasto-plasticity theory. The proposed model is characterized by the following two points: (1) the state in which the static friction coefficient is larger than the kinetic friction coefficient is considered as the "bulkiness" of friction coefficient by structure of contact surface, and (2) the decay and healing of the structure is described by an evolution rule for capturing state transition from static to kinetic friction. In this paper, we show that the model is capable to describe stable sliding, stick-slip phenomenon and the differences of slip phenomenon associated with change of normal stress. The model was also implemented in the boundary conditions of a dynamic infinitesimal deformation elastic analysis, and it was applied to a simple shear deformation field. The results showed that the normal stress distribution on the contact surface becomes non-uniform with elapsed time, and that slip occurs from the region where the normal stress decreases, and the slip region expands and propagates to other regions with rearrangement of stress.

Key words: Friction, Stick-slip, Slip propagation, Elasto-plasticity, Dynamic analysis