

波浪作用による海底地盤の「完全排水・非排水応答」の弾性理論解の導出と それらの数値解析による再現

Derivation and numerical reproduction of analytical solutions to elastic seabed deformation under wave loading in completely drained and undrained conditions

飯島琢臣¹, 豊田智大², 野田利弘²

1 名古屋大学・工学研究科・ijjima.takumi.h3@s.mail.nagoya-u.ac.jp

2 名古屋大学・工学研究科

概 要

波浪外力作用下にある海底地盤の代表的な弾性応答理論解として、Yamamoto¹⁾による解が知られている。Yamamoto は、静的な二次元平衡方程式に Darcy 則を考慮した水～土骨格連成式を連立し、海底地盤が有限の透水係数を持つ「部分排水条件」を仮定して理論解を導出している。しかし、「完全排水／非排水条件」下での理論解は、単純に Yamamoto 解の透水係数無限大／ゼロの極限としては導出できない。また、部分排水条件であっても、透水係数が大きく／小さくなるにつれて、Yamamoto 解における係数方程式が悪条件となり、Robust な係数決定が困難となる。本稿では、完全排水／非排水条件を仮定した理論解を新たに導出するとともに、その解の特徴を Yamamoto 解と比較しつつ述べる。さらに一連の理論解は、無限水平地盤における変位と流量の水平方向の周期性を考慮した水～土骨格連成解析により再現可能であることを示す。

キーワード：理論解、海底液状化、透水性、水～土連成解析、周期境界

1. はじめに

波浪作用下にある海底地盤の力学挙動を捉えることは、海洋構造物の不安定化や海底地すべりなどの問題に対処する上で重要な課題である。地盤挙動の解明においては、種々の変形解析手法が強力なツールとなりうるが、解析技術の確立に際しては、信頼性の高い理論解との比較を通じた Verification が必須となる。

これまで、波浪作用下にある海底地盤の水～土連成問題を対象に、様々な理論解が、異なる仮定や条件の下で提案されてきた。一方、いずれの理論解も、海底地盤が有限の透水係数を有すること（部分排水条件）を仮定した Darcy 則を基に定式化されている。

その中で特に代表的なものが Yamamoto¹⁾による二次元波浪作用下の有限層厚をもつ海底弾性地盤の応答理論解である。定式化の詳細は本稿 2 章で述べるが、Yamamoto は、Darcy 則を考慮した連成式と二次元の力のつり合い式（平衡方程式）を支配方程式として解を導出している。Yamamoto 解では、定常解を基本解の重ね合わせで表現しているが、その係数は陽な形では表示されておらず、係数決定に際しては、境界条件式より導出される連立一次方程式を解く必要がある。そのため、同方程式のマトリクスについて、単純に透水係数を無限大またはゼロとする極限をとった場合、逆が存在せず解が定まらなくなる。したがって Yamamoto 解では、海底地盤の透水性が非常に高い場合

も低い場合も海底地盤挙動を表現することが不可能であり、広範な透水性の下での海底地盤挙動の変化を捉える上で問題がある。

本稿では、まず Yamamoto 解で取り扱う問題の無次元化を行い、透水係数が大きい／小さい場合になぜ海底地盤挙動を表現できなくなるのかを考察する。次に、完全排水／非排水（すなわち、透水係数無限大／ゼロ）の条件下での海底地盤の波浪応答理論解を導出する。透水係数を変化させた Yamamoto 解とそれらの解を比較し、それらの解の特徴を捉えるとともに、Yamamoto 解の極限としてそれらの理論解が位置づけることを解析的に示す。最後に、無限水平地盤における水平方向の変位と流量の周期性を考慮した数値解析手法により、広範な透水係数の下での海底地盤の波浪応答理論解が統一的に再現可能であることを示す。

2. Yamamoto の理論解

まず、Yamamoto 解を Ulker et al.²⁾ で用いられた無次元量を用いて無次元化する。続いて、透水係数が十分に大きい／小さい場合における係数決定方程式におけるマトリクスの成分変化を示す。

2.1 無次元化

図 1 に、本研究が取り扱う二次元波浪作用下の海底地盤

を示す。同図において、水平、鉛直座標をそれぞれ x, z とする。評価対象としての海底地盤は、有限層厚 d_v をもち、下部が非排水かつ剛な基礎地盤（解析対象外）と接続している。海底地盤表層には、波浪外力として式(1)で表される規則進行波 u_w を全応力と水圧として与える。

$$u_w(x, z, t) = u_{w0} \exp\{i(kx + \omega t)\} \quad (1)$$

ここに、 u_{w0} は波圧振幅、 t を時間、 i を虚数単位とする。 k は波数、 ω は角振動数であり、それぞれ波長 L と周期 T を用いて $k = 2\pi/L$ 、 $\omega = 2\pi/T$ と表される。

また、海底地盤は水平方向に無限に堆積していることを想定し、式(1)として規則波で表現される波浪外力と対応した水平方向の変位や流量の周期性を考慮することができるものとする。

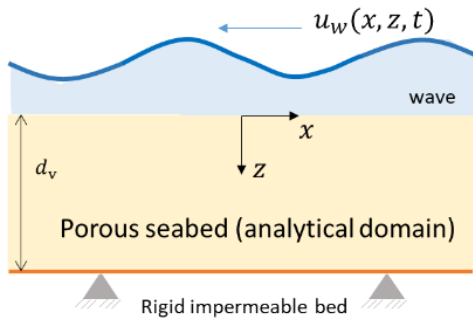


図1 二次元波浪作用下の海底地盤

加えて、その他の解析条件として、以下を想定する。

- 微小変形
- 二次元平面ひずみ
- 加速度（慣性力）の非考慮
- 底面は水平・鉛直変位固定
- 定常解のみに着目
- 間隙水の流れはDarcy則に従う

透水係数は有限の値をとる（部分排水条件）。さらに、海底地盤を線形弾性体と仮定し、静穏状態を基準にとり、波圧変動に由来する変位増分・水圧増分のみを評価する。

支配方程式として、力のつり合い式(2),(3)と連成式(4)を以下に示す。

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (2)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{\partial u_e}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{k_s}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \right) = \frac{n}{K_f} \frac{\partial u_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (4)$$

ここに、 u_e は過剰間隙水圧、 u_x, u_z はそれぞれ x, z 方向の変位であり、いずれも未知関数である。 λ は第1ラメ定数、 G はせん断弾性定数、 n は間隙比、 k_s は透水係数、 γ_w は水の単位体積重量である。 K_f は間隙水の見かけの体積弾性係数であり、Verruijt³⁾より飽和度 S_r と下記の式で結びつけられる。

$$K_f = K_w P_0 / \{P_0 + K_w(1 - S_r)\} \quad (5)$$

ここに、 P_0 は初期絶対水圧、 K_w は水の体積弾性係数である。同式で、飽和度 S_r を1（完全飽和）の場合は、 K_f は K_w と一致する。

次に、無次元化した座標、時間、未知数を以下に示す。

$$\bar{x} = kx, \quad \bar{z} = z/d_v, \quad \bar{t} = \omega t, \quad (6)$$

$$\bar{u}_x = ku_x, \quad \bar{u}_z = ku_z, \quad \bar{u}_e = u_e/u_{w0}$$

ここで、無次元化した未知数について、水平方向の周期性を仮定し、 \bar{z} 方向の関数 $\bar{U}_x(\bar{z})$ 、 $\bar{U}_z(\bar{z})$ 、 $\bar{P}(\bar{z})$ を用いて、以下のように変数分離を行う。

$$\begin{aligned} \bar{u}_x &= \bar{U}_x(\bar{z}) \exp\{i(\bar{x} + \bar{t})\}, \\ \bar{u}_z &= \bar{U}_z(\bar{z}) \exp\{i(\bar{x} + \bar{t})\}, \\ \bar{u}_e &= \bar{P}(\bar{z}) \exp\{i(\bar{x} + \bar{t})\} \end{aligned} \quad (7)$$

上式(7)を式(2),(3),(4)に代入し、 \bar{z} 方向の微分演算子 $D = \partial/\partial\bar{z}$ を用いて、下記の無次元化した支配方程式を得る。

$$\{-(\kappa_1 + 2\kappa_2) + \kappa_2 D^2/m^2\} \bar{U}_x + \{i(\kappa_1 + \kappa_2)D/m\} \bar{U}_z + (-i\kappa_a) \bar{P} = 0 \quad (8)$$

$$\{i(\kappa_1 + \kappa_2)D/m\} \bar{U}_x - (\kappa_2 - (\kappa_1 + 2\kappa_2)D^2/m^2) \bar{U}_z - (\kappa_a D/m) \bar{P} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (-1) \bar{U}_x + (iD/m) \bar{U}_z + \\ (i\kappa_a/\kappa + \Pi_1 \kappa_a m^2 (1 - D^2/m^2)) \bar{P} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、無次元量である $\Pi_1, \kappa, \kappa_1, \kappa_2, m$ はZienkiewicz et al.⁴⁾によって提案されたものであり、それぞれ式(11)で表され、 Π_1 にのみ地盤の透水係数が含まれる。また、今回新たに水圧振幅に関する無次元量 κ_a を式(12)で定義する。

$$\Pi_1 = \frac{k_s(E_c + K_f/n)}{\gamma_w \omega d_v^2}, \quad \kappa = \frac{K_f/n}{E_c + K_f/n}, \quad (11)$$

$$\kappa_1 = \frac{\lambda}{E_c + K_f/n}, \quad \kappa_2 = \frac{G}{E_c + K_f/n}, \quad m = kd_v$$

$$\kappa_a = \frac{u_{w0}}{E_c + K_f/n} \quad (12)$$

ここに、 $E_c = \lambda + 2G$ は一次元弾性係数である。また、式(11),(12)より、合計6つの無次元量が抽出されたが、実際は、弾性係数間の関係から式(13)が導かれ、合計5つの無次元量で現象を説明できることになる。

$$1 - \kappa = \kappa_1 + 2\kappa_2 \quad (13)$$

式(8),(9),(10)から、 \bar{z} 方向の微分演算子 D についての特性方程式を下記のように導出できる。

$$\begin{aligned} (D^2 - \mu^2)^2 (D^2 - \mu'^2) &= 0, \\ \mu &= m, \quad \mu' = m \left(1 + \frac{1}{\Pi_1 m^2 (1 - \kappa) \kappa} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

よって、上式が二重根を解に持つことを考慮すると、 $\bar{U}_x, \bar{U}_z, \bar{P}$ の理論解は18個の係数 $a_1 \sim a_6, b_1 \sim b_6, c_1 \sim c_6$ を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{U}_x(\bar{z}) &= a_1 \cosh(\mu\bar{z}) + a_2 \sinh(\mu\bar{z}) + a_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + a_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) + a_5 \cosh(\mu'\bar{z}) + a_6 \sinh(\mu'\bar{z}) \\ \bar{U}_z(\bar{z}) &= b_1 \cosh(\mu\bar{z}) + b_2 \sinh(\mu\bar{z}) + b_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + b_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) + b_5 \cosh(\mu'\bar{z}) + b_6 \sinh(\mu'\bar{z}) \\ \bar{P}(\bar{z}) &= c_1 \cosh(\mu\bar{z}) + c_2 \sinh(\mu\bar{z}) + c_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + c_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) + c_5 \cosh(\mu'\bar{z}) + c_6 \sinh(\mu'\bar{z}) \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)を式(8),(9),(10)に代入し、係数比較を行うと、 $b_1 \sim b_6, c_1 \sim c_6$ は $a_1 \sim a_6$ を用いて式(16),(17)のように表される。

$$\begin{aligned} b_1 &= -ia_2 + iA_1a_3, \quad b_2 = -ia_1 + iA_1a_4, \\ b_3 &= -ia_4, \quad b_4 = -ia_3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} b_5 &= -i(\mu'/\mu)a_6, \quad b_6 = -i(\mu'/\mu)a_5 \\ c_1 &= -iA_2a_4, \quad c_2 = -iA_2a_3, \quad c_3 = 0, \\ c_4 &= 0, \quad c_5 = A_3a_5, \quad c_6 = A_3a_6 \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 $A_1 \sim A_3$ は下記のように表される。

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{m} \frac{1 + \kappa_2}{1 - \kappa_2}, \quad A_2 = \frac{1}{m\kappa_a} \frac{2\kappa_2\kappa}{1 - \kappa_2}, \\ A_3 &= \frac{1}{\Pi_1\kappa_a m^2\kappa} \end{aligned} \quad (18)$$

これにより、18個の係数のうち、独立に決定すべき係数は $a_1 \sim a_6$ の6個に縮約され、これらの係数は6つの境界条件式(19)~(24)より決定される。式(19)~(21)は、それぞれ海底地盤表面($\bar{z} = 0$)における水圧変動、せん断応力がゼロ、鉛直有効応力がゼロ(鉛直全応力増分と水圧増分を外力として与えるため)の条件式を表す。式(22)~(24)は、底部($\bar{z} = 1$)において、水平変位固定、鉛直変位固定、非排水条件を表す。

$$\bar{u}_e = \exp\{i(\bar{x} + \bar{t})\} \text{ at } \bar{z} = 0 \quad (19)$$

$$\Delta \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{m} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{x}} = 0 \text{ at } \bar{z} = 0 \quad (20)$$

$$\Delta \bar{\sigma}'_z = \kappa_1 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{m} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ at } \bar{z} = 0 \quad (21)$$

$$\bar{u}_x = 0 \text{ at } \bar{z} = 1 \quad (22)$$

$$\bar{u}_z = 0 \text{ at } \bar{z} = 1 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ at } \bar{z} = 1 \quad (24)$$

ここに、 $\Delta \bar{\tau}_{xz}$ 、 $\Delta \bar{\sigma}'_z$ はそれぞれ無次元化されたせん断応力増分と鉛直有効応力増分である。

式(16),(17)を考慮し、式(15)を式(19)~(24)に代入すると、係数決定方程式として付録中の式(A-1)の連立方程式が得られる。同式を $a_1 \sim a_6$ について解き、式(16),(17)に代入して全ての係数を求めることで、解 \bar{u}_x 、 \bar{u}_z 、 \bar{u}_e を得る。またその他の応力増分諸量についても、以下の式に代入することで解を得る。

$$\Delta \bar{\sigma}'_x = (\kappa_1 + 2\kappa_2) \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\kappa_1}{m} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} \quad (25)$$

$$\Delta \bar{\sigma}'_z = \kappa_1 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{m} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} \quad (26)$$

$$\Delta \bar{\tau}_{xz} = \frac{\kappa_2}{m} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{z}} + \kappa_2 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{x}} \quad (27)$$

これらの有効応力増分は、いずれも $E_c + K_f/n$ で無次元化されていることを述べておく。

2.2 透水係数の変化による行列式の変化

式(11),(12)に示される無次元量のうち、透水係数 k_s を含むのは、 Π_1 のみである。透水係数が非常に大きい($k_s \rightarrow \infty$)とき、 $\Pi_1 \rightarrow \infty$ 、 $\mu' \rightarrow \mu$ 、 $A_3 \rightarrow 0$ として極限をとることができるため、式(A-1)の左辺のマトリクスは式(A-2)のように表現できる。同式のマトリクスのうち、第1列と第5列、第

2列と第6列が一致し、列ベクトル同士が線形従属となるためマトリクスのランク落ちを生じ、同式は解けなくなる(逆が存在しない)ことがわかる。

一方、透水係数が非常に小さくなる($k_s \rightarrow 0$)場合においても、 $\Pi_1 \rightarrow 0$ 、 $\mu' \rightarrow \infty$ 、 $A_3 \rightarrow \infty$ として極限を考えると、行基本変形を経て式(A-1)は、式(A-3)のように表現されるため、やはりマトリクスの非正則化が確認できる。

また、たとえ透水係数が有限の値をもつ場合でも、透水係数が非常に大きい/小さい場合には、式(A-1)左辺のマトリクスが非正則に近づくことで、条件数(連立方程式の解の相対誤差に対する感度を示す数値で、大きい場合、解の誤差を増幅させ、方程式の解を一意に求めるのが困難になる)の非常に大きい悪条件行列となることから、Yamamoto 解の Robust な係数決定が困難となる。

具体的な解析条件として、表1に示す波浪外力条件と表2に示す地盤物性値、幾何条件(層厚)の下で生成される式(A-1)のマトリクスの条件数が、透水係数に応じてどう変化するかを図-2に示す。透水係数が小さく($k_s \rightarrow 10^{-3}$ [m/s])、または大きくなる($k_s \rightarrow 10^3$ [m/s])につれて、マトリクスの条件数が大きく、式(A-1)の行列の逆を精度よく求めることが困難になることが確認できる。

表 1 外力条件*1

波高 H [m]	24.0
境界圧振幅 $a_0 (= H\gamma_w/2)$ [kPa]	57.0
周期 T [s]	15.0
角速度 $\omega (= 2\pi/T)$ [rad/s]	0.419
波長 L [m]	324.0
波数 $\lambda (= 2\pi/L)$ [rad/m]	0.019
波速 $C (= L/T)$ [m/s]	21.6

*1 Moshagen and Torum⁹⁾より

表 2 地盤物性値、幾何条件*2

物性値	
間隙比 n	0.333
水の体積弾性係数*3 K_f [kN/m ²]	2.27×10^6
水の単位体積重量 γ_w [kN/m ³]	9.81
せん断弾性係数 G [kN/m ²]	1.00×10^4
幾何条件	
層厚 d_v [m]	25.0

*2 Yamamoto¹⁾より

*3 完全飽和として、水の体積弾性係数と一致

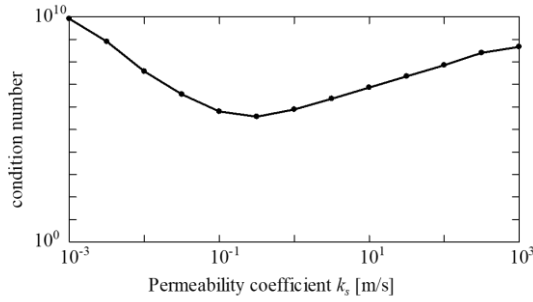


図2 透水係数に伴う条件数の変化 (縦軸対数軸)

3. 完全排水・非排水条件下の海底地盤の波浪応答理論解の導出

3.1 完全排水条件下の海底地盤応答理論解

海底地盤の透水係数が非常に大きい場合 ($k_s \rightarrow \infty$) は、連成式として式(10)が下記のように変形できる。

$$(1 - D^2/m^2)P = 0 \quad (28)$$

したがって特性方程式は、下記のように表せる。

$$(D^2 - \mu^2)^3 = 0, \quad \mu = m \quad (29)$$

上式(29)が、三重根を持つことを加味し、解 \bar{U}_x , \bar{U}_z , \bar{P} を係数 $a_1 \sim a_6$, $b_1 \sim b_6$, $c_1 \sim c_6$ を用いて下記のように表現する。

$$\begin{aligned} \bar{U}_x(\bar{z}) &= a_1 \cosh(\mu\bar{z}) + a_2 \sinh(\mu\bar{z}) + a_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + a_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) + a_5 \bar{z}^2 \cosh(\mu\bar{z}) + a_6 \bar{z}^2 \sinh(\mu\bar{z}) \\ \bar{U}_z(\bar{z}) &= b_1 \cosh(\mu\bar{z}) + b_2 \sinh(\mu\bar{z}) + b_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + b_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) + b_5 \bar{z}^2 \cosh(\mu\bar{z}) + b_6 \bar{z}^2 \sinh(\mu\bar{z}) \\ \bar{P}(\bar{z}) &= c_1 \cosh(\mu\bar{z}) + c_2 \sinh(\mu\bar{z}) + c_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + c_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) + c_5 \bar{z}^2 \cosh(\mu\bar{z}) + c_6 \bar{z}^2 \sinh(\mu\bar{z}) \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)を支配方程式(8), (9), (28)に代入し、係数比較を行うことで、下記の係数関係式を得る。

$$a_5 = 0, \quad a_6 = 0 \quad (31)$$

$$b_3 = -ia_4, \quad b_4 = -ia_3, \quad b_5 = 0, \quad b_6 = 0 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{i(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_a} a_1 - i \frac{\kappa_1 + 3\kappa_2}{m\kappa_a} a_4 + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_a} b_2, \\ c_2 &= \frac{i(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_a} a_2 - i \frac{\kappa_1 + 3\kappa_2}{m\kappa_a} a_3 + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_a} b_1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$c_3 = 0, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0$$

これらより、基本解 $\bar{z}^2 \cosh(\mu\bar{z})$ と $\bar{z}^2 \sinh(\mu\bar{z})$ の係数がゼロになることから、基本解のモードとして、Yamamoto 解の6つから4つに減ることがわかる。また、 a_5, a_6 のかわりに b_1, b_2 が境界条件より定まる独立な係数となることがわかる。式(30)~(33)を境界条件式(19)~(24)に代入することで、連立方程式(A-4)を得る。

3.2 完全非排水条件下の海底地盤応答理論解

透水係数が非常に小さい ($k_s \rightarrow 0$) 場合は、連成式(10)が下記のように変形できる。

$$(-1)\bar{U}_x + (iD/m)\bar{U}_z + (i\kappa_a/\kappa)\bar{P} = 0 \quad (34)$$

この場合の特性方程式は下記のように表せられ、次数が6

から4になる。

$$(D^2 - \mu^2)^2 = 0, \quad \mu = m \quad (35)$$

したがって解 \bar{U}_x , \bar{U}_z , \bar{P} を係数 $a_1 \sim a_4$, $b_1 \sim b_4$, $c_1 \sim c_4$ を用いて下記のように表現する。

$$\begin{aligned} \bar{U}_x(\bar{z}) &= a_1 \cosh(\mu\bar{z}) + a_2 \sinh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + a_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) + a_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) \\ \bar{U}_z(\bar{z}) &= b_1 \cosh(\mu\bar{z}) + b_2 \sinh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + b_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) + b_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(\bar{z}) &= c_1 \cosh(\mu\bar{z}) + c_2 \sinh(\mu\bar{z}) \\ &\quad + c_3 \bar{z} \cosh(\mu\bar{z}) + c_4 \bar{z} \sinh(\mu\bar{z}) \end{aligned}$$

上式(36)を支配方程式(8),(9),(34)に代入し、係数比較を行うことで、下記の関係式を得る。

$$b_1 = -ia_2 + iA_1 a_3, \quad b_2 = -ia_1 + iA_1 a_4, \quad (37)$$

$$b_3 = -ia_4, \quad b_4 = -ia_3$$

$$c_1 = -iA_2 a_4, \quad c_2 = -iA_2 a_3, \quad (38)$$

$$c_3 = 0, \quad c_4 = 0$$

浸透流を一切生じない本条件下では、間隙水圧は連成式(10)の解として求まるのではなく、間隙水が土骨格の体積変化を束縛した結果得られる束縛力として、境界水圧とは無関係に定まる⁹⁾。したがって、境界条件として、式(19), (21)に代わり、海底地盤表面において、鉛直全応力増分 $\Delta\bar{\sigma}_z$ が外力変動と一致する下記の条件式を考える。

$$\Delta\bar{\sigma}_z = \exp\{i(\bar{x} + \bar{t})\} \text{ at } \bar{z} = 0 \quad (39)$$

また、式(24)は敢えて考慮する必要がないことから、式(39), (20), (22), (23)の計4本の境界条件式に式(36)~(38)を代入することで、連立方程式(A-5)を得る。

3.3 透水係数の変化に伴う海底地盤の波浪応答理論解の変化

導出した二つの理論解と Yamamoto による有限透水係数を持つ部分排水条件下の海底地盤応答理論解と比較するため、2. 節と同様の外力条件、地盤の物性値と幾何条件の下で、波数 k で無次元化した水平変位 u_x と鉛直変位 u_z 、波圧振幅 u_{w0} で無次元化した過剰間隙水圧 u_e 、せん断応力増分 $\Delta\tau_{xz}$ 、水平有効応力 $\Delta\sigma'_x$ 、鉛直有効応力 $\Delta\sigma'_z$ 、平均有効応力 $\Delta p'$ 、軸差応力 Δq の (波浪外力が一周期分作用した間での) 最大値の鉛直分布を図-3 に示す。同図の Yamamoto 解については、透水係数 k_s を 10^{-3} から 10^0 [m/s] へと変化させた結果を示している。

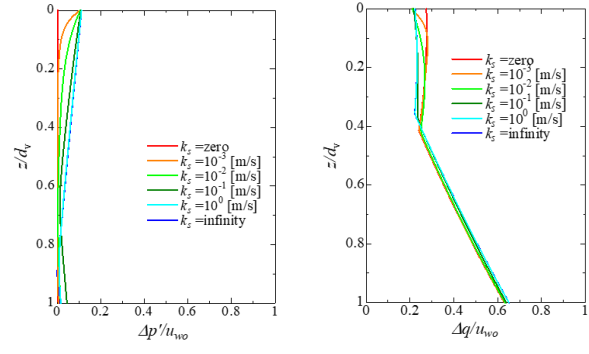
いずれの諸量についても、Yamamoto 解で透水係数を大きく、あるいは小さく設定した場合は、それぞれ完全排水・非排水条件下での理論解に漸近していることが確認できる。そのため、解析的には、Yamamoto 解の透水係数を変化させた極限として、本稿で導出した完全排水・非排水条件下の海底地盤の波浪応答理論解を位置付けられることが確認された。

また、同図から透水係数に対する諸量の最大値の変化について、以下のことが言える。

- 最大過剰間隙水圧 u_e や最大水平・鉛直有効応力増分 $\Delta\sigma'_x, \Delta\sigma'_z$ は、地表において、透水係数に応じた変化

の程度が大きい。特に非排水の過剰間隙水圧解は、地表においても外圧振幅に一致しなくなる等、透水係数が低い解 ($k_s = 10^{-3}$ [m/s]) との差が著しい。これは、Yamamoto 解と完全非排水条件下で課している境界条件が異なることに起因する。

- 最大せん断応力増分 $\Delta\tau_{xz}$ は、透水係数に応じた変化が小さい。これは、水圧の変化が及ぼすせん断変形への影響が小さいためである。
- 完全排水の理論解において、最大平均有効応力増分 $\Delta p'$ は最大をとり、完全非排水の理論解では、 $\Delta p'$ は全く生じない。一方、最大鉛直有効応力増分 $\Delta\sigma'_z$ は完全非排水の理論解において最大をとる。このため、 $\Delta\sigma'_z$ の変化が初期鉛直有効応力を上回るかどうかを判定する既往の液状化予測手法では、低透水地盤が液状化を起こしやすいと判断される。しかし液状化は p' で判断されるべきため、実際は高透水地盤で液状化が起こりやすいことを示唆する。



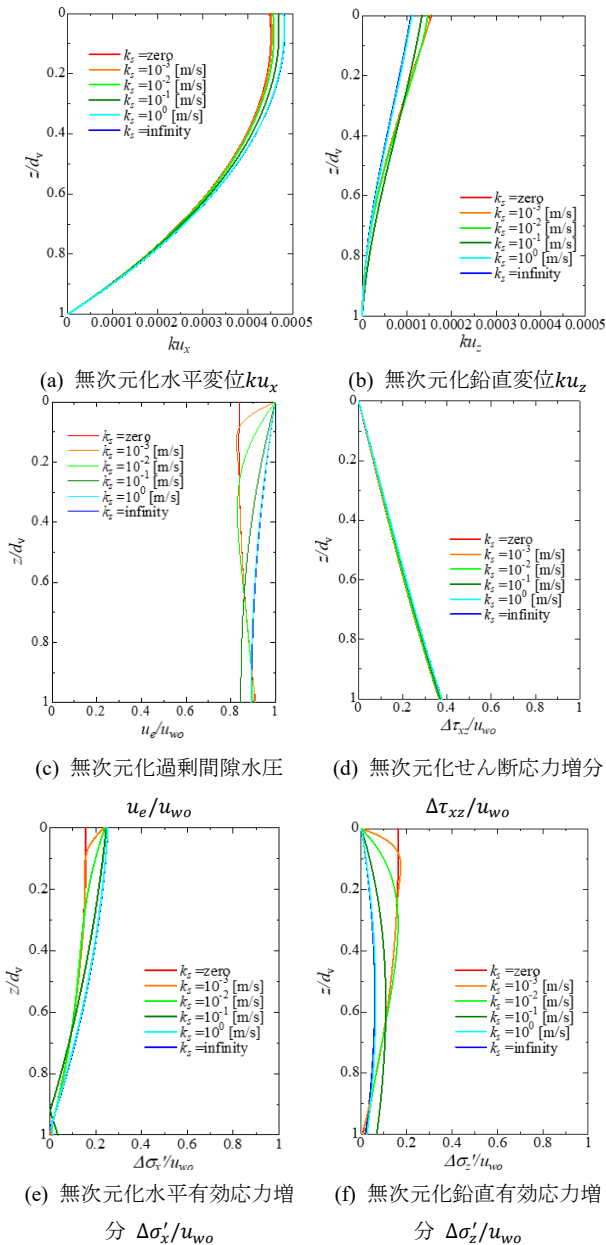
(g) 無次元化平均有効応力増分 $\Delta p'/u_{w0}$ (h) 無次元化軸差応力増分 $\Delta q/u_{w0}$
 図3 諸量の最大値の鉛直分布

4. 数値解析による理論解の再現

波浪作用下の海底地盤挙動を捉えるための数値解析手法を構築することは、海底地盤液状化メカニズムをはじめとした海底地盤ダイナミクスを理解すること、ひいては海洋構造物の基礎地盤の波浪外力に対する安定性を評価する上で重要である。そのため、数値解析手法が理論解と同様の挙動を再現することを示すことによる Verification を完遂することは必須である。

一方で、2節で示した Yamamoto 解が代表するように、一連の二次元波浪作用下の海底弾性地盤応答理論解は、水平方向に無限に連なる地盤を想定し、同方向に変位や流量といった地盤挙動の周期性を考慮して定式化を行っている。数値解析では一般に、解析領域を有限に定める必要があり、理論解と同様の挙動を再現するためには、そのような水平方向の地盤の周期性を考慮した解析手法を構築することが必要である。本稿では、左右両端の境界水圧を未知数にとり、水平方向の流量収支をゼロとする条件式と左右端の等境界水圧条件式を混合体の運動方程式と連成式に陽に連立することにより閉じた方程式系を構築し、それに基づく数値解析手法を適用した ($u-p-p_b$ formulation による水理周期境界条件、詳細は既報⁷⁾に譲る)。また、左右両端の変位の周期性 (等変位条件) を Lagrange の未定乗数法⁸⁾により考慮した。さらに、それらの流量と変位の周期性を有効とするために、数値解析モデルの水平幅は、波長の整数倍 (2倍) とした。解析条件は2.2節と同様に課し、透水係数を変えた3ケース実施した。

図4.5.6はそれぞれ完全排水、部分排水、完全非排水条件 ($k_s = 10^{99}, 10^{-2}, 0$ [m/s]) の下での波圧振幅 u_{w0} で正規化された過剰間隙水圧 u_e 、平均有効応力増分 $\Delta p'$ 、軸差応力増分 Δq の時間変化を鉛直・水平位置が異なる6点において、理論解と数値解析解を同じグラフの上で示す。これらから、いかなる位置、時刻においても、三つの諸量の理論解と数値解析解が一致することが確認できる。さらに変位についても、図7の等時コンターから、同様のことが言える。したがって、今回用いた数値解析手法は、理論解と同様の水平方向の周期的な挙動を表現することが可能であり、同数値解析手法の Verification が完了した。



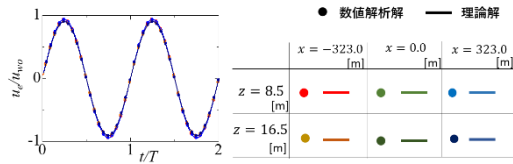


図4 完全排水条件下の波浪応答理論解と数値解析解

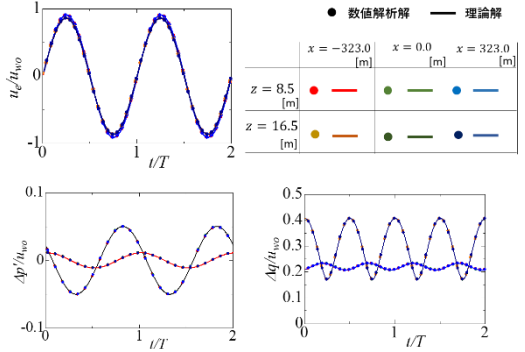


図5 部分排水条件下の波浪応答理論解と数値解析解

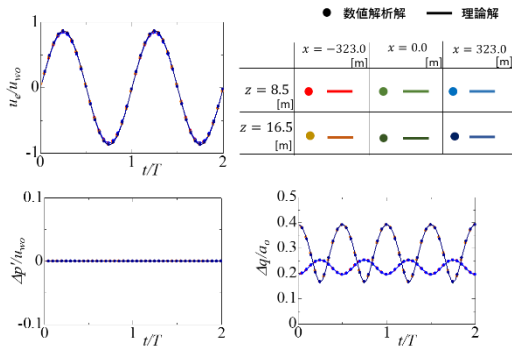


図6 完全非排水条件下の波浪応答理論解と数値解析解

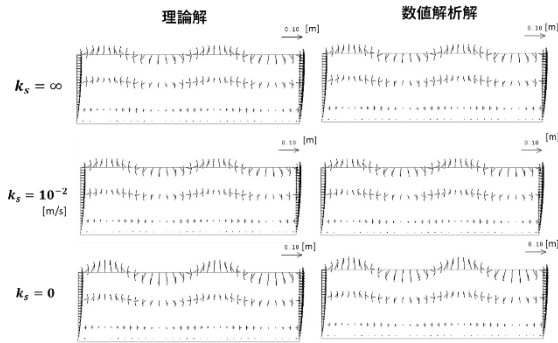


図7 理論解と数値解析解の変位の等時コンター

5. おわりに

二次元波浪作用下の海底地盤の弾性応答を記述する理論解の代表として Yamamoto によるものを取り上げた。同手法は、有限の透水係数をもつ Darcy 則に基づいて定式化されており地盤の部分排水的挙動を捉える一方、透水係数 k_s が非常に大きい ($k_s \rightarrow \infty$), または小さい ($k_s \rightarrow 0$) 条件に対応する極限を考えた場合に、係数を決定するための連立方程式のマトリクスが線形従属となるために、その逆がとれず、方程式が解かれえないものになることを、同計算中のマトリクスを無次元化した上で示した。

次に、支配方程式中の連成式について、透水係数を大きくまたは小さくするとした極限をとることで、同式を縮約し、Yamamoto 解と同様に完全排水・非排水条件下の海底地盤の波浪応答理論解を導出した。これらの理論解は、Yamamoto 解の基本解の数より2つ少ないモード(計4つ)で表現されることを示した。そして、Yamamoto 解において透水係数を変化させた解と、今回導出した二つの解を比較することで、それら二つの理論解が、Yamamoto 解の透水係数を変化させた極限として表現されるものであることを解析的に示し、完全排水解において平均有効応力増分 $\Delta p'$ が最大をとる一方、完全非排水解では $\Delta p'$ が一切生じないことを確認した。

最後に、境界水圧 p_b を未知数にとりつつ、水平方向の流量、水圧、変位の周期性を考慮した数値解析手法 ($u-p-p_b$ formulation) を用いることで、完全排水、部分排水(有限の透水係数)、完全非排水条件下の海底地盤の波浪応答が再現できることを示し、数値解析手法がいかなる地盤の透水性においても有効であることを示した。

今後は、今回 Verification が完了した数値解析手法に弾塑性構成式を導入し、海底地盤液状化解析を実施し、実験・観測値と比較して、同手法の Validation を行う。さらに V&V が完了した解析手法を、様々な境界条件の下での海底地盤変形メカニズム解明に役立てる。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 22K14324 の補助を受けた。

A.1 付録

本文中の連立方程式の具体系を以下に示す。

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & -iA_2 & A_3 & 0 \\
 0 & 2 & \frac{1}{m} - A_1 & 0 & 0 & 2\frac{\mu'}{\mu} \\
 2\kappa_2 & 0 & 0 & \frac{(1-\kappa)}{m}(1-mA_1) & (1-\kappa)\frac{\mu'^2}{\mu^2} - \kappa_1 & 0 \\
 \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu') & \sinh(\mu') \\
 \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \frac{\mu'}{\mu}\sinh(\mu') & \frac{\mu'}{\mu}\cosh(\mu') \\
 0 & 0 & -i\mu A_2 \cosh(\mu) & -i\mu A_2 \sinh(\mu) & \mu' A_3 \sinh(\mu') & \mu' A_3 \cosh(\mu')
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 a_4 \\
 a_5 \\
 a_6
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (\text{A-1})$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & -iA_2 & 0 & 0 \\
0 & 2 & \frac{1}{m} - A_1 & 0 & 0 & 2 & a_1 & 1 \\
2\kappa_2 & 0 & 0 & \frac{(1-\kappa)}{m}(1-mA_1) & 2\kappa_2 & 0 & a_2 & 0 \\
\cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & a_3 & 0 \\
\sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & a_4 & 0 \\
0 & 0 & -A_1 \cosh(\mu) & -A_1 \sinh(\mu) & 0 & 0 & a_5 & 0 \\
0 & 0 & -i\mu A_2 \cosh(\mu) & -i\mu A_2 \sinh(\mu) & 0 & 0 & a_6 & 0
\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A-2)$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & a_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & a_5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & a_6 & 0
\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A-3)$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{i(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_a} & 0 & 0 & -i \frac{\kappa_1 + 3\kappa_2}{m\kappa_a} & 0 & \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_a} b_2 \\
0 & 1 & \frac{1}{m} & 0 & i & 0 & a_1 & 1 \\
\kappa_1 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{m} & 0 & -i(\kappa_1 + 2\kappa_2) & a_2 & 0 \\
\cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & 0 & 0 & a_3 & 0 \\
0 & 0 & -i \sinh(\mu) & -i \cosh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & a_4 & 0 \\
\sinh(\mu) & \cosh(\mu) & -\frac{\kappa_1 + 3\kappa_2}{m(\kappa_1 + \kappa_2)} \cosh(\mu) & -\frac{\kappa_1 + 3\kappa_2}{m(\kappa_1 + \kappa_2)} \sinh(\mu) & -i \cosh(\mu) & -i \sinh(\mu) & b_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 & 0
\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A-4)$$

$$\begin{bmatrix}
-2i\kappa_2/\kappa_a & 0 & 0 & \frac{2i\kappa_2}{m\kappa_a(1-\kappa_2)} \\
0 & 2 & \left(\frac{1}{m} - A_1\right) & 0 \\
\cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) \\
\sinh(\mu) & \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & \cosh(\mu) \\
\sinh(\mu) & \cosh(\mu) & -A_1 \cosh(\mu) & -A_1 \sinh(\mu)
\end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A-5)$$

参考文献

- 1) Yamamoto, T. 'Wave induced instability in seabeds', Proc. Coastal Sediments '77 AXE, pp. 898-913, 1977.
- 2) Ulker, M.B.C., Rahman M.S., Jeng D.-S.: Wave-induced response of seabed: Various formulations and their applicability. Applied Ocean Research, Vol.31, Issue 1, pp. 12-24, 2009.
- 3) Verruijt, A.: Elastic Storage of Aquifers: Flow through Porous Media (R.J.M. De Wiest, editor), Academic Press, pp.331-376, 1969.
- 4) Zienkiewicz, O.C., Chang, C. T., Bettess. P.: Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. Geotechnique, Vol. 30, No.4, pp.385-395, 1980.
- 5) Moshagen, H., Torum, A.: Wave Induced Pressures in Permeable Seabeds, ASCE Journal of WHCE, Vol.101, Issue 1, pp. 49-57, 1975.
- 6) Asaoka A., Kodaka K., Pokharel G.: Stability Analysis of Reinforced Soil Structures Using Rigid Plastic Finite Element Method, Soils and Foundations, Vol.34, Issue 1, pp.107-118, 1994.
- 7) 飯島琢臣, 豊田智大, 野田利弘: 水理周期境界導

入のための要素境界水圧を陽に未知数にとる定式化手法の提案. 計算工学講演会論文集, Vol. 29, 2024.

- 8) Asaoka A., Noda T., Kaneda K.: Displacement/Traction Boundary Conditions Represented by Constraint Conditions on Velocity Field of Soil, Soil and Foundations, Vol.38, Issue 4, pp.173-181, 1998.

Derivation and numerical reproduction of analytical solutions to elastic seabed deformation under wave loading in completely drained and undrained conditions

Takumi IIJIMA¹, Tomohiro TOYODA², Toshihiro NODA²

1 Nagoya University, Department of engineering · iijima.takumi.h3@s.mail.nagoya-u.ac.jp

2 Nagoya University, Department of engineering

Abstract

Yamamoto's solution to two dimensional wave-induced response of elastic seabed is based on Darcy's law with a finite permeability coefficient considering a partially drained condition. However, it cannot explain seabed behavior under both fully drained and undrained conditions simply by taking the limit of permeability coefficient as infinity and zero. In addition, even in the partially drained condition, determination of coefficients of solutions becomes less robust if permeability coefficient increases/decreases greatly so that it lacks applicability to seabed of high and low permeability. In this study, theoretical solutions to wave-induced behavior of seabed under the fully drained and undrained conditions are derived. Through the comparison of those theoretical solutions with Yamamoto's solution, their characteristics are discussed and they are identified as extreme seabed behaviors explained by Yamamoto's solution. Furthermore, all those theoretical solutions to seabed behavior in any drainage condition is shown to be reproducible by a numerical scheme which can consider horizontally periodic flow and displacement assumed in all those analytical solutions.

Key words: Theoretical solution, Seabed liquefaction, Permeability, Soil-water coupling analysis, Periodic boundary