間隙水のダイナミクスを考慮した弾塑性解析による飽和地盤の不安定化現象の数値解析

Numerical analysis on instability phenomena of saturated soil with elasto-plastic analysis considering pore water dynamics

豊田智大[1]，野田利弘[2]，佐竹孝曜[3]

1　名古屋大学大学院・工学研究科・toyoda@civil.nagoya-u.ac.jp
2　名古屋大学大学院・工学研究科
3　中部電力

概　　要

著者らは間隙水の相対加速度を考慮可能な ***u-w-p*** formulation に基づく水～土連成解析手法を開発してきた。本稿では，同手法の地盤の不安定化問題に対する有用性を以下の 2 つの点から示した。1) ***u-w-p*** formulation に基づく弾塑性有限変形解析手法を飽和地盤の不安定化問題（砂地盤～盛土系の地震外力による液状化問題，鉛直動水勾配作用下でのボイリング問題）に対して適用し，平均有効応力減少に伴い地盤が不安定化する条件下でも破綻することなく計算を継続できることを示した。2) 時空間離散化した ***u-w-p*** formulation の支配方程式および時間積分公式より構築した連立漸化式の数値安定性をスペクトル半径を用いて評価し，同手法の数値安定性が透水係数や時間刻み幅によらず，また ***u-p*** formulation（間隙水の静的浸透を仮定する手法）の適用不能域においても保証されることを，より一般性の高い形で示した。

キーワード：水～土連成，Full formulation，不安定化，液状化，ボイリング

1. はじめに

液状化やボイリングのような，有効応力低下に伴い地盤の剛性が次第に喪失する現象や，すべり破壊，動的座屈といった不安定化問題を対象に時刻歴解析を行う場合，不安定化に伴い step 毎の変位増分が次第に増加してゆくため，十分な時間積分の精度を維持するためには，時間刻み幅 Δt を小さくしてゆく必要がある。

時間刻み幅 Δt の設定に関する要請として代表的なものには，双曲型方程式の陽解法における CFL 条件[1]（実波速を c，格子幅を Δx として，$\Delta x/\Delta t > c$ で与えられる数値安定条件）があり，これは Δt に関する数値解析上の上限を与える。一方，***u-p*** formulation（以下，***u-p*** と記す）に基づく水～土連成解析においては，時間離散化された水～土骨格連成式において物理的不合理を生じないための条件（$\gamma_{\theta 1}$ 基準[2]，透水係数～時間刻み幅比 $k/\Delta t$ の上限を与える，$k/\Delta t < a$）を満足する必要があり，こちらは，ある透水係数 k に対して Δt の下限を与える。この Δt の下限の存在により，***u-p*** では不安定化問題の解析時に Δt を下げてゆくと数値不安定を生じ，計算継続が困難となる。

これに対し，著者らは間隙水の相対加速度および相対移流を考慮した ***u-w-p*** formulation（以下，***u-w-p*** と記す）に基づく水～土骨格連成弾塑性有限変形解析手法を開発し，主として高透水性土の連成問題において，同手法により ***u-p*** の適用限界が克服可能であることを，いくつかの計算事例を通して示してきた[3]。本稿では，1) ***u-p*** では Δt の下限により計算継続不能に陥るような飽和地盤の不安定化問題（砂地盤～盛土系の地震外力による液状化問題，鉛直動水勾配作用下でのボイリング問題）について，***u-w-p*** であれば難なく解けることを確認し，不安定化問題の解析手法としての ***u-w-p*** の有用性を示す。また，数値安定性に関連する話題として，2) ***u-p*** において透水係数を大きく／時間刻み幅を小さくしたときの不安定性はあくまで支配方程式を時間離散化した際に生じる数値的なものであって，***u-p*** の方程式系が本質的に有する不安定性ではない（理論解は発散しない）ことを示すとともに，***u-p*** の不安定域においても ***u-w-p*** であれば数値安定性が保証されていることをスペクトル半径の観点から示す。

2. 砂地盤～盛土系の地震応答解析

2.1 遠心模型実験の概要

解析条件は，国土技術研究センターによる模型実験[4]を参照して与える。同実験は，剛土槽内に作成した砂地盤～盛土系の模型（図 1）を 50G の遠心場で加振するものである。

2.2　境界条件および材料定数

図 2 の一次元モデル（1D，基礎地盤のみ）および二次元モデル（2D，基礎地盤＋盛土）に対し，***u-p*** および ***u-w-p*** で解析を行った。いずれも実規模解析である。入力波として，模型底面において図 3 の水平加速度を与える。簡単のため，構成材料は全域で飽和江戸崎砂とした。弾塑性構成式として SYS Cam-clay model を用い，その材料定数を表 1 のとおり与えた。江戸崎砂の透水係数は 1.7~3.9×10^{-3} cm/s であるが，模型実験では間隙流体を「水」としたため，実地盤の透水係数に換算すると 0.85~1.95×10^{-1} cm/s（高透水性）となる。そこで本研究では，3 種類の透水係数①1.95×10^{-2} cm/s，②9.75×10^{-2} cm/s，③1.95×10^{-1} cm/s に対し解析を行った。解析初期の Δt は 1.25×10^{-3} sec で統一したが，液状化による不安定化に伴い，陰的計算を収束させるためには，解析中に Δt をより小さい値に変更してゆく必要がある。このとき，Δt の低下に伴い，解析条件はスペクトル半径から求めた ***u-p*** の不安定域（4.で後述）に漸近してゆくこととなる。とくに，透水係数の大きい③では，解析初期の Δt に対しても数値不安定となる。

2.3　一次元地震応答解析

解析結果として，下端要素での平均有効応力～時間関係および中央深さの要素での応力経路を図 4 に示す。①では，***u-p*** でも数値不安定を生じることなく解き切ることができ，その解は ***u-w-p*** と一致したが，②では ***u-p*** 解と ***u-w-p*** 解が一致せず，とくに ***u-p*** 解（23sec 以降）においては，等体積条件下で正の過剰水圧の発生が解かれたにもかかわらず平均有効応力は増大する結果となった。これは，静的浸透仮定の破綻により生じた不合理な物理現象 [2)] である。③では，初期 Δt に対しても ***u-p*** による計算は全く実行できず，　***u-w-p*** によってのみ計算を継続できた。

表 1　材料定数（江戸崎砂）

物性値	
土粒子密度 ρ^s (g/cm^3)	2.65
透水係数 k (cm/s)	Case 毎
弾塑性パラメータ	
圧縮指数 $\tilde{\lambda}$	0.050
膨潤指数 $\tilde{\kappa}$	0.012
限界状態定数 M	1.00
正規圧密線の切片 N	1.98
ポアソン比 ν	0.30
発展則パラメータ	
正規圧密土化指数 m	0.060
構造劣化指数 a	1.00
回転硬化指数 b_r	3.50
回転硬化限界定数 m_b	0.90
初期条件	
初期過圧密比 $1/R_0$	分布
初期構造の程度 $1/R_0^*$	2.00
初期土圧係数 K_0	0.60
初期間隙比 e_0	0.90

2.4　二次元地震応答解析

紙幅の都合上，③の透水係数に対する ***u-w-p*** 解に限定し，その概略を示す。盛土から離れた図 5 の点 A においては一次元と同様の有効応力低下が解かれたのに対し，盛土直下の点 B では，せん断作用下での下部地盤からの水の供給により，限界状態線上側での軟化挙動が解かれた。また，基礎地盤における有効応力減少のほか，土骨格加速度に対

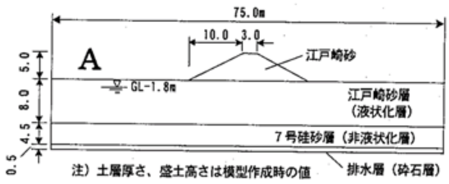


図 1　遠心模型実験のモデル [4)]

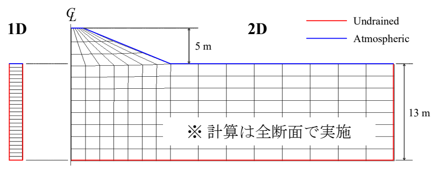


図 2　有限要素メッシュ（地震応答解析）

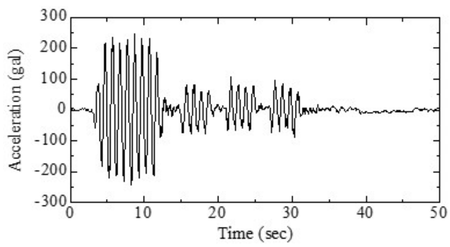
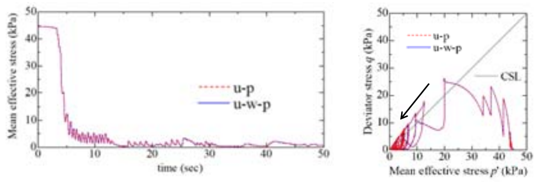
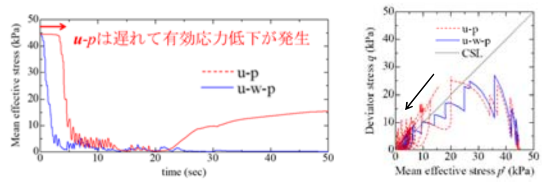


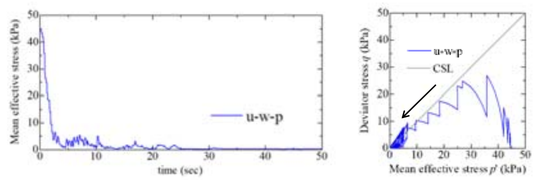
図 3　入力不規則波



①　k = 1.95×10^{-2} cm/s



②　k = 1.95×10^{-2} cm/s



③　k = 1.95×10^{-2} cm/s

図 4　有効応力～時間関係（左）と要素挙動（右）

して無視できない間隙水相対加速度の発生や透水性の高さに起因した流線の乱れも確認された。

3. 飽和弾塑性地盤の鉛直浸透力によるボイリング解析

3.1 一次元ボイリング解析

次に，**u-w-*p*** による一次元飽和地盤のボイリング解析について述べる。解析には，図 6 に示す有限要素メッシュを用いる。水理境界条件について，上端を大気圧境界条件とし，下端における全水頭を静水圧から一定の割合で増加させる（dh/dt = 1cm/s）ことで，鉛直上向きの動水勾配を与えた。構成材料は均質な弾塑性材料とし，SYS Cam-clay model の材料定数および初期状態は，非常に密な状態にある三河珪砂 6 号の値を参照し，表 2 のとおり設定した。

解析結果として，メッシュの変形と流速分布の推移を図 7 に，下端要素の要素挙動を図 8 にそれぞれ示す。図 7 において，解析初期には一様流速の発生が解かれたが，下端要素で平均有効応力がゼロに近づくと（図 8 の点 C，およそ 60sec 時点），その後は剛性を失った下端要素のみで吸水膨張が進行し，地盤全域でのボイリングは解かれなかった。そこで，透水係数の間隙比依存モデル（e ∝ log$k$）を導入したところ，図 9 のような不安定化後の挙動，すなわち，地盤全域で比体積の増減を繰り返し，地表面がボコボコと振動する様子を解くことができた。これは，ある要素で体積膨張が先行しても，その要素の透水係数が体積膨張に応じて周辺要素より大きくなることで，その要素での損失水頭は周囲に較べて相対的に小さくなり，逆に周辺要素での局所動水勾配は相対的に増加して，結果的に地盤全体で連鎖的にボイリングを生じることによる。なお，（今回与えた水位上昇速度に対しては）平均有効応力がゼロに近

表 2　材料定数（三河珪砂 6 号）

物性値	
土粒子密度 ρ^s (g/cm^3)	2.65
透水係数 k (cm/s)	1.5×10^{-1}
透水係数変化率 de/d(ln$k$)※	0.01
弾塑性パラメータ	
圧縮指数 $\tilde{\lambda}$	0.050
膨潤指数 $\tilde{\kappa}$	0.012
限界状態定数 M	1.00
正規圧密線の切片 N	1.98
ポアソン比 ν	0.30
発展則パラメータ	
正規圧密土化指数 m	0.060
構造劣化指数 a	2.20
回転硬化指数 b_r	0.00
初期条件	
初期過圧密比 $1/R_0$	分布
初期構造の程度 $1/R_0^*$	1.26
初期土圧係数 K_0	0.956
初期間隙比 e_0	0.970

※ 透水係数の間隙比依存モデル使用時

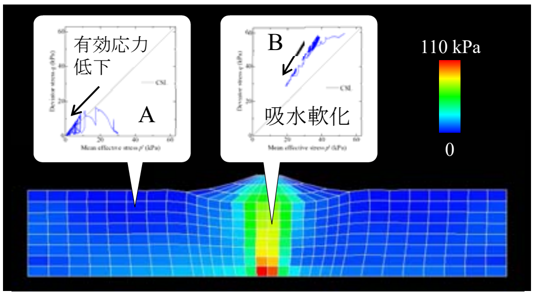


図 5　平均有効応力（最大加速度到達時）

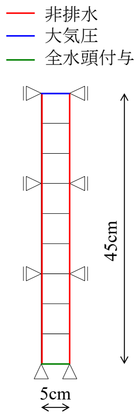


図 6　一次元メッシュ（一次元ボイリング解析）

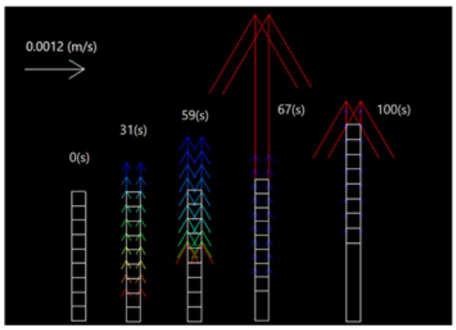


図 7　相対平均流速分布（透水係数一定）

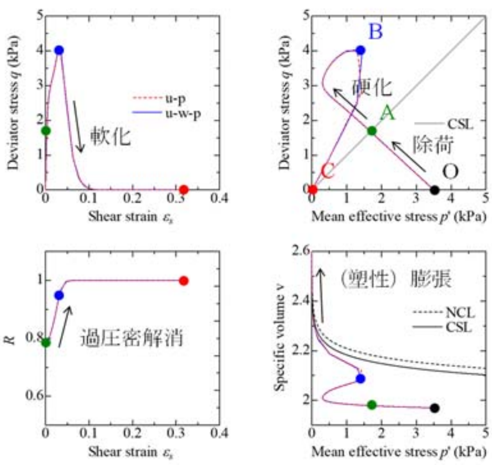


図 8　下端要素の要素挙動（透水係数一定）

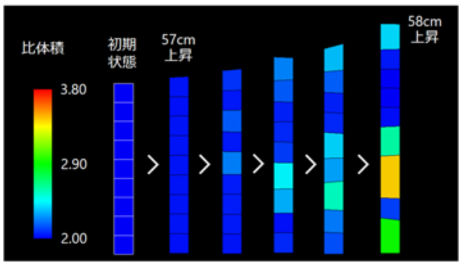


図 9　比体積分布（透水係数は間隙比依存）

づくまでの過程は ***u-p*** でも解くことが可能であったが，その後の不安定挙動は ***u-w-p*** によってのみ解くことができた。

ここでの ***u-p*** の破綻は，平均有効応力喪失後の不安定挙動の追跡には非常に小さい Δt を設定することが要求され，また，透水係数の間隙比依存モデル採用時には透水係数も体積膨張に伴い増大することによる。

3.2　二次元ボイリング解析

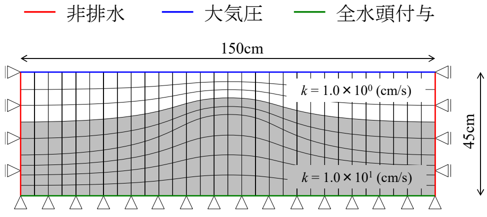
図 10 に示す(a)地盤下部に高透水層を有し，上部層厚の薄い中央部で局所動水勾配が最大となる模型 A と，(b)堤体まわりに二次元浸透場を生じる模型 B に対し ***u-w-p*** で解析を行った。弾塑性定数および全水頭を与える境界での全水頭増加率は一次元解析に準拠した。

解析結果を図 11 および図 12 に示す。模型 A では図 11(a)のような模型中央部での比体積増減に伴う地表面振動や(b)のような流速集中が，模型 B では，図 12 のような動的浸透に起因した流線の乱れが解かれた。

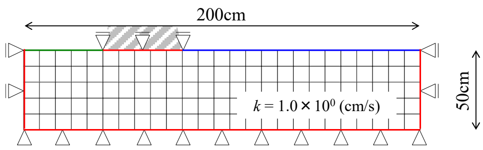
なお，一次元解析および二次元解析（模型 A）では解が非対称となったが，これは数値誤差の影響で不安定化時に解が非対称モードに分岐したためであると考えている。

4. スペクトル半径を用いた u-p/u-w-p の数値安定性の評価

本章では，離散化した ***u-p*** および ***u-w-p*** の支配方程式より連立漸化式を構築し，その安定性をマトリクスのスペクトル半径を用いて評価した。特に，***u-w-p*** により水～土連成計算の実行可能域の拡大（***u-p*** 適用限界の克服）が可能であることを示すとともに，従来より ***u-p*** 適用可否判別に用いられてきた $\gamma_{\theta 1}$ 基準 [2]の例外についても指摘する。本章では，種々の非線形性（弾塑性，有限変形，相対移流項）を無視した上で系の数値安定性を議論するが，これは本章で着目する不安定性があくまで ***u-p*** 定式化に由来する不安定性であり，上記の非線形性に由来する不安定性（材料軟化，分岐など）は対象外とするためである。また，ここでは方程式を一次元化した上でその数値安定性を評価するが，実は多次元問題に対して安定性を評価しても一次元の場合とほぼ変わらない結果が得られる。これは，***u-p*** 由来の不安定性が間隙水圧の発散を伴うが，微小変形・弾性条件下では，水平変位（せん断）は間隙水圧発生に一切寄与せず，これによる数値不安定も生じないことによる。

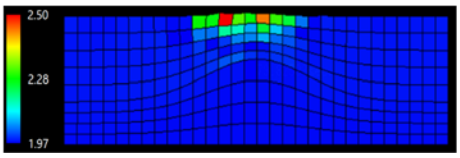


(a)　模型 A（高透水性層を有する地盤）

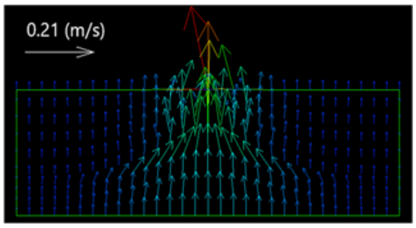


(b)　模型 B（堤体まわりの浸透）

図 10　二次元メッシュ（ボイリング解析）



(a)　比体積分布



(b)　流速分布

図 11　ボイリング時のコンター図（模型 A）

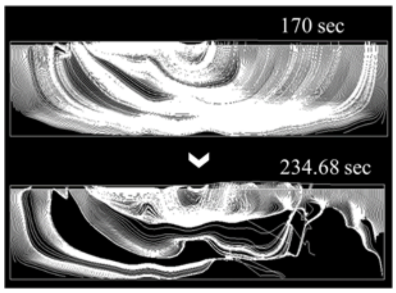


図 12　流線の推移（模型 B）

4.1　水～土連成問題の支配方程式

u-w-p の支配方程式 [3]を以下に示す。

飽和土の運動方程式（速度型）

$$\rho_s \mathrm{D}_s^2 \boldsymbol{v}_s + \rho_f \mathrm{D}_s \mathrm{D}_f \boldsymbol{v}_f + \rho^f (\operatorname{div} \boldsymbol{v}_s)(\mathrm{D}_s \boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{b}) = \operatorname{div}(\mathrm{D}_s \boldsymbol{S}_t) \tag{1-a}$$

間隙水の運動方程式

$$\rho^f \mathrm{D}_f \boldsymbol{v}_f = -\gamma_w \operatorname{grad} h - \frac{\gamma_w}{k} \boldsymbol{w} \tag{1-b}$$

水～土骨格連成式

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_s + \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \tag{1-c}$$

ここに，ρ，ρ_s，ρ_f，ρ^f は混合体，固相，液相，間隙水の

密度，D_s，D_fは固相，液相に着目した物質時間微分，$\boldsymbol{v}_s$，$\boldsymbol{v}_f$は固相，液相の速度，$\boldsymbol{w} = n(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s)$は間隙水の相対平均流速，$\boldsymbol{b}$は物体力，$\mathrm{D}_s\boldsymbol{S}_t$は公称応力速度，$h = z + p/\gamma_w$は全水頭，$p$は間隙水圧，$z$は位置水頭，$n$は間隙率，$k$は透水係数，$\gamma_w$は水の単位体積重量である。一方，***u**-p* の支配方程式は，浸透加速度（間隙水の土骨格に対する相対加速度）が土骨格加速度に対して十分に小さい（$\mathrm{D}_f\boldsymbol{v}_f - \mathrm{D}_s\boldsymbol{v}_s \ll \mathrm{D}_s\boldsymbol{v}_s$）ことを仮定して式(1)を縮約することで得られる [2]。

<u>飽和土の運動方程式（速度型）</u>

$$\rho\mathrm{D}_s^2\boldsymbol{v}_s + \rho^f(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_s)(\mathrm{D}_s\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{b}) = \mathrm{div}(\mathrm{D}_s\boldsymbol{S}_t) \tag{2-a}$$

<u>水～土骨格連成式</u>

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w}\mathrm{div}(\mathrm{D}_s\boldsymbol{v}_s) - \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_s + \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,h) = 0 \tag{2-b}$$

本稿では最も単純な条件として，自重および真物質の圧縮性を無視し，一次元微小変形弾性体について検討する。この場合，式(1)および(2)は以下のように書き換えられる。

<u>***u**-**w**-p*</u>

$$\rho_s\ddot{u}_s + \rho_f\ddot{u}_f = E_c\frac{\partial^2\dot{u}_s}{\partial x^2} - \frac{\partial\dot{p}}{\partial x} \tag{3-a}$$

$$\rho^f\ddot{u}_f = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\gamma_w}{k}w \tag{3-b}$$

$$\frac{\partial\dot{u}_s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3-c}$$

<u>***u**-p*</u>

$$\rho\ddot{u}_s = E_c\frac{\partial^2\dot{u}_s}{\partial x^2} - \frac{\partial\dot{p}}{\partial x} \tag{4-a}$$

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w}\frac{\partial\ddot{u}_s}{\partial x} - \frac{\partial\dot{u}_s}{\partial x} + \frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \tag{4-b}$$

ただし，$x = \{x|0 < x < H\}$は座標，$t = \{t|0 < t\}$は時間，$w = n(\dot{u}_f - \dot{u}_s)$，$(\quad)^{\cdot}$は時間微分を表すが，無次元変数を$U_s = u_s/S, U_f = u_f/S, W = (d/d\tau)\{n(U_f - U_s)\}, P = p/q$，$X = x/H$，$\tau = c_v t/H^2$と定義すれば，式(3)，(4)の無次元表示が得られる。

<u>***u**-**w**-p*</u>

$$\frac{G_s\mathrm{e}}{1 + G_s\mathrm{e}}\overset{\circ\circ\circ}{U}_s + \frac{\mathrm{e}^2}{1 + G_s\mathrm{e}}\overset{\circ\circ\circ}{U}_f = 4h^2\frac{\partial^2\overset{\circ}{U}_s}{\partial X^2} - 4h^2\frac{\partial\overset{\circ}{P}}{\partial X} \tag{5-a}$$

$$\frac{(1 + \mathrm{e})\mathrm{e}}{1 + G_s\mathrm{e}}\overset{\circ\circ}{U}_f = -4h^2\frac{\partial P}{\partial X} - 4h^2\frac{\mathrm{e}}{1 + \mathrm{e}}\left(\overset{\circ}{U}_f - \overset{\circ}{U}_s\right) \tag{5-b}$$

$$\frac{\partial\overset{\circ}{U}_s}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial X} = 0 \tag{5-c}$$

<u>***u**-p*</u>

$$\frac{e(G_s + e)}{1 + G_s e}\overset{\circ\circ\circ}{U}_s - 4h^2\frac{\partial^2\overset{\circ}{U}_s}{\partial X^2} + 4h^2\frac{\partial\overset{\circ}{P}}{\partial X} = 0 \tag{6-a}$$

$$\frac{e(1 + e)}{1 + G_s e}\frac{\partial\overset{\circ\circ}{U}_s}{\partial X} - 4h^2\frac{\partial\overset{\circ}{U}_s}{\partial X} + 4h^2\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = 0 \tag{6-b}$$

ここに，$X = \{X|0 < X < 1\}$は無次元座標，$\tau = \{\tau|0 < \tau\}$は時間係数，$(\quad)^{\circ}$は時間係数による微分を表す。ここに，$h = c_p H/2c_v$は透水係数に反比例する無次元パラメータ，$c_p = \sqrt{(E_c/\rho')}$は非減衰波速，$c_v = kE_c/\gamma_w$は圧密係数，$\rho' = \rho_s + \rho_f/e^2$, $G_s = \rho^s/\rho^f$は土粒子密度，$e = n/(1 - n)$は間隙率，$S = qH/E_c$は静荷重q作用時の最終沈下量である。一次元圧密の初期条件・境界条件（片面排水，瞬間載荷）の下で ***u**-**w**-p* および ***u**-p* の方程式系(5)，(6)を変形すると，それぞれ

<u>***u**-**w**-p*</u>

$$\overset{\circ\circ\circ}{U}_s + 4h^2\overset{\circ\circ}{U}_s - 4h^2\frac{\partial^2\overset{\circ}{U}_s}{\partial X^2} = 0 \tag{7-a}$$

<u>***u**-p*</u>

$$\overset{\circ\circ\circ}{U}_s + 4h^{\#2}\overset{\circ\circ}{U}_s - 4h^{\#2}\frac{\partial^2\overset{\circ}{U}_s}{\partial X^2} = 0 \tag{7-b}$$

という全く同じ型の微分方程式が得られる。ただし，

$$\left(\frac{h^\#}{h}\right)^2 = \frac{1 + G_s e}{e(G_s - 1)} \tag{8}$$

である。式(7-a)，(7-b)は減衰波動方程式と呼ばれる混合型の微分方程式であり，その理論解の n 次モードは，固有値$\beta_n = (2n - 1)\pi/2$と無次元パラメータh（または$h^\#$）の大小関係に応じてその性質が変化する [5]。

- $\beta_\mathrm{n} < h, h^\#$：過減衰（指数関数解）
- $\beta_n = h, h^\#$：臨界減衰
- $\beta_n > h, h^\#$：減衰振動（三角関数解）

ここで重要なのは，上記の式(7)の理論解は，***u**-p*，***u**-**w**-p* を問わず，左辺第 2 項の減衰項の存在により，時刻$\tau \to \infty$において必ず収束するという点である。***u**-p* の理論解が収束するということは，先の 2 章，3 章で見られたような ***u**-p* による計算の不安定性は，方程式系を時間離散化した際に初めて生じる数値的なものであることを意味している。

4.2 連立漸化式とスペクトル半径

式(5)，(6)について，それぞれ Noda and Toyoda[3]および Noda et al.[2]に倣い，有限要素法および Christian・田村流の物理モデルにより空間離散化し，Wilson-θ 法の時間積分公式を組み合わせると，以下の代数方程式の形に整理できる。

<u>空間離散化した支配方程式・Wilson-θ 法の内挿公式</u>

$$\mathrm{A}\boldsymbol{u}_{n+\theta} = \mathrm{B}\boldsymbol{u}_n \tag{9-a}$$

<u>Wilson-θ 法の引き戻し公式</u>

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \mathrm{C}\boldsymbol{u}_n + \mathrm{D}\boldsymbol{u}_{n+\theta} \tag{9-b}$$

自由度毎の未知変数の成分からなる係数列ベクトル$\boldsymbol{u}_n$，およびマトリクスA～Dの中身は ***u**-p* と ***u**-**w**-p* で異なり，その具体形は紙幅の都合上省略するが，(9-b)に(9-a)を代入することで以下の連立漸化式を構築できる。

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \mathrm{E}\boldsymbol{u}_n\,, \qquad \mathrm{E} = \mathrm{C} + \mathrm{DA}^{-1}\mathrm{B} \tag{10}$$

そこで，式(10)中のマトリクス E のスペクトル半径

$$\rho(\mathrm{E}) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_N|) \tag{11}$$

（ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$はEの固有値）を調べれば，式(10)の漸化式の安定性を評価できる。すなわち，$\rho(\mathrm{E}) \leq 1$であれば，あらゆる初期値$\boldsymbol{u}_0$に対し発散することなく step 更新可能（安定）であるといえる。

一方，Noda et al.[2]は，水～土連成式の符号反転に着目し，その計算可否が次式で定義される係数$\gamma_{\theta1}$の正負により判定できると考えた（$\gamma_{\theta1} > 0$のとき安定）。

$$\gamma_{\theta1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t}\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \tag{12}$$

以降，$\gamma_{\theta1}$による ***u**-p* 計算可否判定の妥当性にも言及する。

4.3　スペクトル半径に基づく安定性評価

透水係数kおよび時間刻み幅Δtを変えたときの $\boldsymbol{u}$-p および $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{w}$-p の方程式系の安定性を式(11)のスペクトル半径$\rho(\mathrm{E})$から判定した。ただし，要素分割数を $m = 10$ とし（これ以上分割数を増やしても安定性に影響がないことを確認済），典型的なパラメータとして，$\theta = 1.4$，層厚 $H = 1$m，ヤング率 E = 10000kPa，ポアソン比 ν = 0.30，土粒子比重 G_s = 2.65，間隙比 e = 1.0 を与えた。固有値解析には Intel® Math Kernel Library を使用した。

$\boldsymbol{u}$-p および $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{w}$-p による収束判定結果を図 13，図 14 にそれぞれ示す。$\boldsymbol{u}$-p においては，図 13 のように帯状の発散域（$\rho(\mathrm{E}) > 1$）が出現するのに対し，$\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{w}$-p では，図 14 のように全域が収束域（$\rho(\mathrm{E}) \leq 1$）となることから，$\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{w}$-p であればあらゆる透水係数・時間刻み幅に対して安定して計算を継続できる。

次に，図 13 の $\boldsymbol{u}$-p 発散域の形態に着目すると，図の下側（低透水性）では収束域と発散域の閾線は斜めに分布する。これは，Noda et al.[2]し，式(13)より導かれる $\gamma_{\theta 1}$ 基準線（$\gamma_{\theta 1} = 0$，図中の赤線）による計算可否判別が概ね有効であるといえるが，上側（高透水性）では閾線が縦に分布し，$\gamma_{\theta 1}$ 基準線にそぐわない結果となる。これは，$\boldsymbol{u}$-p の理論解の性質が上側と下側とで異なることによる。すなわち，閾線が斜めになる範囲は，図中の $\beta_1 = h$ 線下側で（式(7-b)の理論解に過減衰モードを 1 つ以上含む領域）と一致し，閾線が縦になる範囲は，$\beta_1 = h$ 線上側（式(7-b)の理論解の全モードが減衰振動解となる領域）と一致している。また，斜めの閾線と縦の閾線では，相異なるモード（$\beta_1 = h$ 線上側では有意な土骨格加速度を含むモード）の固有値の絶対値が 1 を超えることも確認している。なお，詳細は割愛するが，図 13 の $\boldsymbol{u}$-p 発散域と収束域の閾線近傍や，左上側のような（Δt が非常に小さく step 毎の固相変位がほとんど進行しない）非圧縮域においては，たとえ$\rho(\mathrm{E}) \leq 1$の安定域あっても，$\boldsymbol{u}$-p 解が $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{w}$-p 解と一致しない（$\boldsymbol{u}$-p 計算は負の即時水圧を生じる）領域が出現する点に注意を要する。

なお，図 13 には 2 章における液状化解析における解析条件を①②③として併記している。透水係数を大きく設定するにつれて，解析条件が次第に $\boldsymbol{u}$-p の不安定域に漸近し，$\boldsymbol{u}$-p による計算は困難となってゆく。とくに③は，初期 Δt に対してもスペクトル半径が 1 を超える不安定域に属しており，図 4③において解析初期から $\boldsymbol{u}$-p 計算が実行不能に陥るという事実とよく対応している。

5. おわりに

時間刻み幅 Δt を小さく設定しなければ解くことの難しい不安定化問題の数値解析における $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{w}$-p の有用性を液状化解析・ボイリング解析を通して実証的に示した。また，$\boldsymbol{u}$-p の不安定性が方程式系を時間離散化することではじめて生じるものである（理論解は発散しない）ことを示した上で，スペクトル半径を用いた安定判別法により，この数値不安定性が $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{w}$-p により克服可能であることを示した。

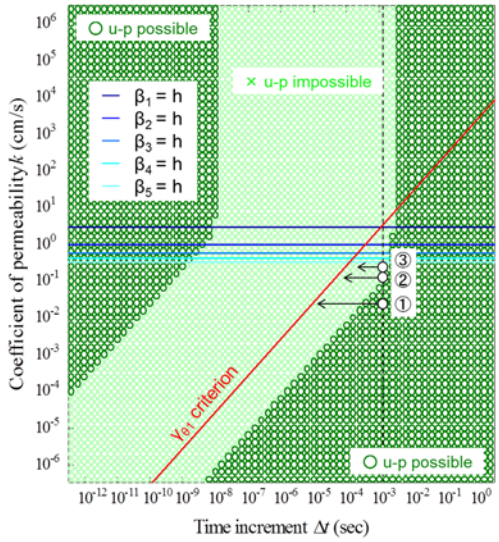


図 13　数値安定性（$\boldsymbol{u}$-p）

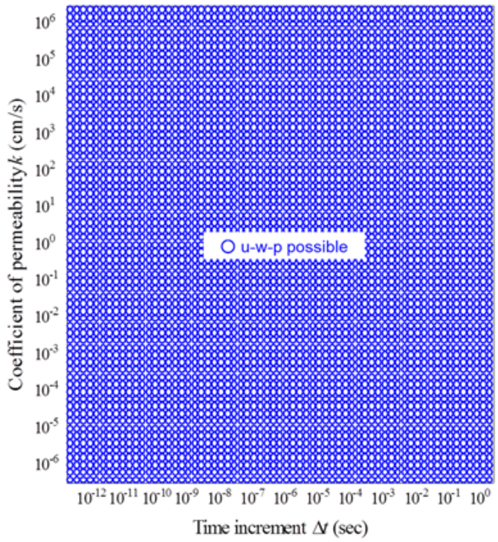


図 14　数値安定性（$\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{w}$-p）

謝辞　本研究は JSPS 科研費 22K14324 の助成を受けた。

参考文献

1) Thomas, J. W.: Numerical partial differential equations: finite difference methods, Springer, 1995.
2) Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, Soils and Foundations, Vol. 48, No. 6, pp. 771-790, 2008.
3) Noda, T. and Toyoda, T.: Development and verification of a soil–water coupled finite deformation analysis based on u–w–p formulation with fluid convective nonlinearity, Soils and Foundations, Vol. 59, No. 4, pp. 888-904, 2019.
4) 国土技術研究センター：河川堤防の地震時変形量の解析手法，土と基礎，JICE 資料第102001号，A1-A2, 2002.
5) Toyoda, T. and Noda, T.: Numerical simulation based heuristic investigation of inertia-induced phenomena and theoretical solution based verification by the damped wave equation for the dynamic deformation of saturated soil based on the u-w-p governing equation, Soils and Foundations, Vol. 61, No. 2, pp. 352-370, 2021.